

Mathematische Methoden der Informatik

Übungsblatt zur linearen Optimierung

Übung 1

Betrachtet wird das Optimierungsproblem

Maximiere $3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Transformieren Sie das Problem in die Standardform

Maximiere $c \cdot x$ mit $Ax \leq b$.

b) Transformieren Sie das Problem in die Standardform

Maximiere $c \cdot x$ mit $Ax = b$ ($b \geq 0$) und $x \geq 0$.

Übung 2

Betrachtet wird das Optimierungsproblem

$$\text{Maximiere } 2x_1 - x_2 \text{ unter den Nebenbedingungen } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie den zulässigen Bereich und bestimmen Sie grafisch die Lösung des Problems.

Was sind die aktiven, was die inaktiven Nebenbedingungen in der Maximalstelle?

Übung 3

Skizzieren Sie den zulässigen Bereich zu den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie c_1 und c_2 an, so dass das Maximierungsproblem für $c_1x_1 + c_2x_2$

- keine Lösung hat,
- eine eindeutige Lösung hat,
- mehrere Lösungen hat.

Übung 4

Ein Landwirt will seine 60 Hektar mit Mais bzw. Weizen bewirtschaften.

Der Erlös von einem Hektar Mais bringt 2600€, der von einem Hektar Weizen 2000€.

Für einen Hektar Mais müssen 2000€ investiert werden; der Anbau nimmt 10 Stunden pro Hektar in Anspruch.

Weizen ist billiger (1000€ pro Hektar) braucht aber mehr Bearbeitungszeit (20 Stunden pro Hektar).

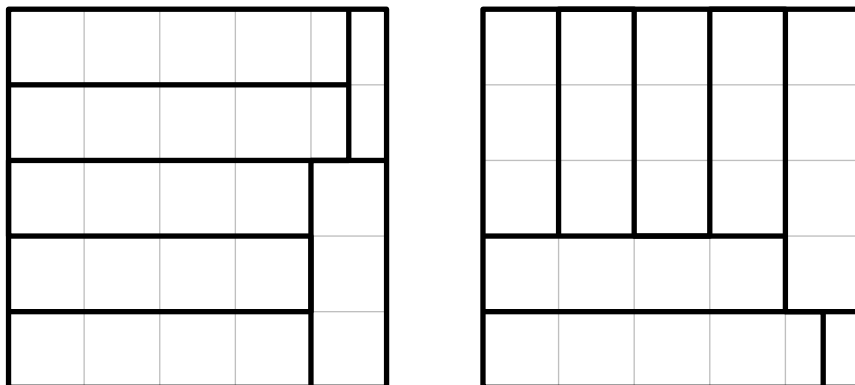
Der Landwirt hat eine Investitionssumme von 100000€ zur Verfügung und kann 900 Stunden Arbeit aufwenden.

Wieviel Mais bzw. Weizen sollte der Landwirt anbauen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

(Keine Gewähr auf die Angaben; sie sind nicht recherchiert.)

Übung 5

Ein Regalhersteller will $1\text{m} \times 1\text{m}$ -Bretter in 60cm, 80cm bzw. 90cm lange Regalbretter zersägen (Breite jeweils 20cm). Dabei hat er die beiden folgenden Zerlegungsmöglichkeiten (Raster im 20cm-Abstand):



Der Hersteller braucht

1600 Bretter der Länge 60cm,

1800 Bretter der Länge 80cm,

1000 Bretter der Länge 90cm.

Wieviel $1\text{m} \times 1\text{m}$ -Bretter benötigt er?

Übung 6

Betrachtet wird das Problem:

$$\text{Finde ein } \vec{x} \in \mathbb{R}^4, \vec{x} \geq 0, \text{ mit } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet das zugehörige Initial-Point-Problem?

Übung 7

Untersuchen Sie, ob es zu den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

einerseits mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, andererseits mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, einen zulässigen Punkt gibt, indem Sie das entsprechende Initial-Point-Problem aufstellen, lösen und das Ergebnis interpretieren.

Zum Lösen können Sie beispielsweise www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html nutzen. (Beachten Sie dabei, dass dort standardmäßig Nichtnegativitäts-Nebenbedingungen für alle Variablen benutzt werden, und dass alle Variablen (ggf. mit Vorfaktor 0) in der Zielfunktion genannt werden müssen.)