TSP als ILP

Wie kann man die Suche nach einer kürzesten Rundreise als lineares Optimierungsproblem formulieren?

Variablen:

- $x_{ij} \in \{0,1\}$, je nachdem, ob die Kante (i,j) (gerichtet) in der Tour ist,
- u_i, $i=2,\ldots n$, reellwertig.

Minimiere $\Sigma\, x_{ij} \cdot c_{ij}$.

Nebenbedingungen:

- für jedes i: $\Sigma_{\text{über } j}\, x_{ij} = 1$ und $\Sigma_{\text{über } j}\, x_{ji} = 1$
- für alle $i,j \in \{2,\ldots,n\}$: $(n-1)x_{ij} + u_i - u_j \leq n-2$

TSP als ILP

Nebenbedingungen:

- für jedes i: $\Sigma_{\text{über } j}\, x_{ij} = 1$ und $\Sigma_{\text{über } j}\, x_{ji} = 1$
- für alle $i,j \in \{2,\ldots,n\}$: $(n-1)x_{ij} + u_i - u_j \leq n-2$

Tour $\Rightarrow$ NB erfüllbar:

- Betrachte Konten 1 als Start der Tour.
- Sei u_i der Zeitpunkt des Besuchs von Knoten i.
- 1. Fall: Kante (i,j) in Tour:

  $\Rightarrow x_{ij} = 1,\ u_j = u_i + 1$

  $\Rightarrow (n-1)x_{ij} + u_i - u_j = n-1 + u_i - (u_i + 1) = n-2.$
- 2. Fall: Kante (i,j) nicht in Tour, also $x_{ij} = 0$.

  Wegen $u_i \leq n$ und $u_j \geq 2$ ist dann

  $(n-1)x_{ij} + u_i - u_j = u_i - u_j \leq n-2.$

TSP als ILP

Nebenbedingungen:

- für jedes i: $\Sigma_{\text{über } j}\, x_{ij} = 1$ und $\Sigma_{\text{über } j}\, x_{ji} = 1$
- für alle $i,j \in \{2,\ldots,n\}$: $(n-1)x_{ij} + u_i - u_j \leq n-2$

NB erfüllt $\Rightarrow$ Tour:

- Annahme: Es gibt einen Teilkreis.
- Dann gibt es auch einen Teilkreis ohne Knoten 1, sei das $i_1, i_2, \ldots, i_k$.
- Summe der Ungleichungen für $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots (i_k, i_1)$ ergibt
  $k \cdot (n-1)\cdot 1 \quad\quad \leq \quad k \cdot (n-2)$

$\Rightarrow$ Widerspruch!