FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

Lineare Optimierung

1 Problemformulierung

Viele Probleme im industriellen oder wirtschaftlichen Umfeld kann man als lineare Optimierungsprobleme formulieren. Dabei soll eine lineare Zielfunktion unter linearen Nebenbedingungen optimiert werden.

Beispiel:

Maximiere die Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) \;=\; 3x_1 + 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccc} -x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 36, \\ & x_1, x_2 & & \geq & 0. \end{array}$$

Die zu maximierende Zielfunktion kann man auch vektoriell mit Hilfe des Skalarprodukts schreiben als

$$f(x_1, x_2) \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die linke Seite der ersten drei Nebenbedingungen kann man auch als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben. Definiert man darüberhinaus eine vektorielle Ungleichung komponentenweise, so kann man die ersten drei Ungleichungen schreiben als

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\leq\; \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Um einheitlich „$\leq$“-Relationen zu nutzen, kann man Nebenbedingungen mit „$\geq$“-Relation mit -1 muliplizieren, wodurch sich das Ungleichheitszeichen rumdreht. Insbesondere kann man dadurch auch die Bedingungen $x_1, x_2 \geq 0$ schreiben als $-x_1, -x_2 \leq 0$. Damit kann man die gesamten Nebenbedingungen schreiben als

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\leq\; \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 36 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im Allgemeinen gibt es neben Ungleichungs- auch Gleichungsbedingungen. Damit erhält man die folgende allgemeine Formulierung eines linearen Optimierungsproblems (*LP-Problem*, **L**inear **P**rogramming).

Allgemeine Problemstellung:

Gesucht ist ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit maximalem *Zielfunktionswert*

$$f(\vec{x}) \;=\; \vec{c} \cdot \vec{x} \qquad \text{mit festem } \vec{c} \in \mathbb{R}^n$$

unter den *Nebenbedingungen*

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \vec{x} &= \vec{b}_1, \\ A_2 \cdot \vec{x} &\leq \vec{b}_2, \end{aligned}$$

wobei "$\leq$" komponentenweise zu verstehen ist.

Eine Ungleichungs-Nebenbedingung heißt *aktiv* genau dann, wenn dort „=" gilt.

Ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt *zulässig* genau dann, wenn $\vec{x}$ alle Nebenbedingungen erfüllt.

Bemerkungen:

1. Ein Minimierungsproblem „minimiere $\vec{c} \cdot \vec{x}$" kann man als Maximierungsproblem „maximiere $-\vec{c} \cdot \vec{x}$" formulieren, so dass es keine Einschränkung darstellt, bei der allgemeinen Problemstellung von einer Maximierung auszugehen.
2. Wie schon im Beispiel erwähnt, kann man „$\geq$"-Nebenbedingungen durch Multiplikation mit -1 in „$\leq$"-Nebenbedingungen umformulieren, so dass es keine Einschränkung darstellt, bei der allgemeinen Problemstellung nur „$\leq$"-Nebenbedingungen zu betrachten.

Die Nebenbedingungen sind für ein lineares Optimierungsproblem essentiell. Ohne Nebenbedingungen würde man beliebig große Zielfunktionswerte durch $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{c}$ erhalten.

2 Standardformen

Für die Formulierung der Nebenbedingungen gibt es zwei Standardformen:

Standardform 1 für Nebenbedingungen: $A \cdot \vec{x} \leq \vec{b}$:

Diese Standardform nutzt also nur Ungleichungs-Bedingungen.

Gleichungsbedingungen kann man durch Aufdoppeln in Ungleichungsbedingungen umwandeln:

$$A_1 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad (A_1 \cdot \vec{x} \leq \vec{b}_1 \quad \text{und} \quad A_1 \cdot \vec{x} \geq \vec{b}_1).$$

Die letzte Ungleichung kann man auch schreiben als $-A_1 \cdot \vec{x} \leq -\vec{b}_1$, so dass man die Gleichungsbedingung als Matrix-Vektor-Ungleichung in der Form

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ -A_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \;\leq\; \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \end{pmatrix}$$

schreiben kann.

Beispiel:

Die Gleichungs-Nebenbedingung

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \end{array}$$

wird (in Matrix-Vektor-Form) zu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hdashline -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \hdashline -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Standardform 2 für Nebenbedingungen: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ **(mit** $\vec{b} \geq 0$**) und** $\vec{x} \geq 0$:

Diese Standardform nutzt also nur Gleichungs-Bedingungen (mit einer rechten Seite, die nur nichtnegative Werte besitzt) und Variablenwerte größer oder gleich Null.

Allgemeine Nebenbedingungen kann man durch folgende Schritte in diese Normalform transformieren:

1. Ungleichungsbedingungen kann man durch Einführen von *Schlupfvariablen* in Gleichungsbedingungen umwandeln.

   Beispiel:

   Die Ungleichungsbedingung

   $$x_1 + 2x_2 \leq 14$$

   wird durch Einführung einer neuen nichtnegativen Variablen y zu der Gleichungsbedingung

   $$x_1 + 2x_2 + y = 14 \quad \text{und} \quad y \geq 0.$$

2. Eine Gleichungsbedingung mit einer negativen Zahl auf der rechten Seite kann man mit -1 multiplizieren, um rechts einen nichtnegativen Wert zu erhalten.

3. Eine unbeschränkte Variable x_j kann man ersetzen durch

   $$x_j = x_{j,1} - x_{j,2} \quad \text{mit} \quad x_{j,1}, x_{j,2} \geq 0.$$

Beispiel:

Bei einem Optimierungsproblem „maximiere $3x_1 + 4x_2 = \binom{3}{4} \cdot \binom{x_1}{x_2}$“ mit den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 1, \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq & -2, \\ x_1 & & & \geq & 0 \end{array}$$

muss für die Ungleichungsbedingung „$x_1 + 4x_2 \leq -2$“ eine Schlupfvariable $y_1 \geq 0$ eingeführt werden: $x_1 + 4x_2 + y_1 = -2$. Um rechts einen nichtnegativen Wert zu erhalten, wird die Gleichung mit -1 multipliziert: $-x_1 - 4x_2 - y_1 = 2$. Ferner wird die unbeschränkte Variable x_2 ersetzt durch $x_2 = x_{2,1} - x_{2,2}$ mit $x_{2,1}, x_{2,2} \geq 0$.

Damit erhält man folgendes Optimierungsproblem:

$$\text{Maximiere } 3x_1 + 4(x_{2,1} - x_{2,2}) \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ y_1 \end{pmatrix}$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{array}{rcccccl} 3x_1 & - & 2(x_{2,1} - x_{2,2}) & & & = & 1, \\ -x_1 & - & 4(x_{2,1} - x_{2,2}) & - & y_1 & = & 2, \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und $x_1, x_{2,1}, x_{2,2}, y_1 \geq 0$.

3 Lösungsidee

Wie sieht ein zulässiger Bereich zu einem linearen Optimierungsproblem aus? Betrachtet wird hier die Standardform 1 für Nebenbedingungen, also die Ungleichungs-Darstellung $A \cdot \vec{x} \leq \vec{b}$.

Beispiel:

Betrachtet wird das gleiche Beispiel wie in Kapitel 1.1. mit zwei Variablen x_1 und x_2. Damit kann man den zulässigen Bereich als Teilmenge der (x_1, x_2)-Ebene ansehen.

Bei den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 36 \end{array}$$

beschreibt jede Ungleichung eine Halbebene, denn die entsprechende Gleichung definiert eine Gerade, und durch die Ungleichung wird – ausgehend von der Geraden – eine Richtung, in die die Variablen abweichen können, festgelegt:

- Die Punkte, die

  $$-x_1 + x_2 \;\leq\; 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \;\leq\; 4 + x_1$$

  erfüllen, liegen unterhalb (wegen „$x_2 \leq$“) der Geraden g_1, die durch $x_2 = 4 + x_1$ definiert ist.

- Die Punkte, die

  $$x_1 + 2x_2 \;\leq\; 14 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \;\leq\; 7 - \tfrac{1}{2}x_1$$

  erfüllen, liegen unterhalb (wegen „$x_2 \leq$“) der Geraden g_2, die durch $x_2 = 7 - \frac{1}{2}x_1$ definiert ist.

- Die Punkte, die

$$4x_1 + 3x_2 \;\leq\; 36 \quad\Leftrightarrow\quad x_2 \;\leq\; 12 - \tfrac{4}{3}x_1$$

  erfüllen, liegen unterhalb der Geraden g_3, die durch $x_2 = 12 - \frac{4}{3}x_1$ definiert ist.

Abbildung 1 zeigt den zulässigen Bereich als den Bereich, der übrig bleibt, wenn man die verbotenen Halbebenen (schraffiert) wegnimmt. (Die Geraden selbst sind noch nicht verboten.) Dabei sind die Ungleichungen $x_1, x_2 \geq 0$ mit berücksichtigt.

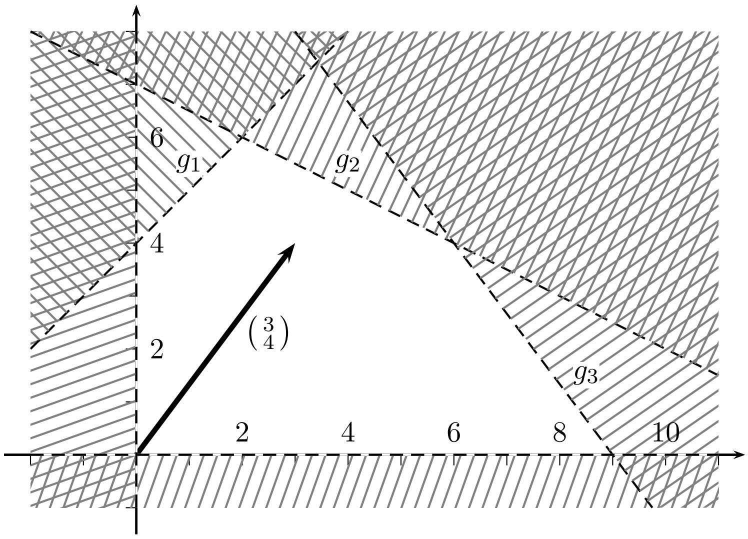

Abbildung 1: Zulässiger Bereich und Optimierungsrichtung.

Für zwei Variablen entstehen durch die Schnitte der Halbräume Polygone wie in Abbildung 1. Löcher können nicht entstehen. Der zulässige Bereich kann auch unbeschränkt (zum Beispiel, wenn es in Abbildung 1 die durch g_2 und g_3 beschriebenen Beschränkungen nicht gibt) oder leer sein.

Gesucht ist nun ein Punkt $\vec{x}$ im zulässigen Bereich, der $\vec{c} \cdot \vec{x}$ maximiert, d.h. möglichst weit in $\vec{c}$-Richtung liegt, wobei $\vec{c}$ auch verschoben werden kann. Betrachtet man von einem zulässigen Punkt $\vec{x}$ Änderungen in Richtung $\Delta\vec{x}$, also den Punkt $\vec{x} + \Delta\vec{x}$, so erhält man als Zielfunktionswert

$$f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) \;=\; \vec{c} \cdot (\vec{x} + \Delta\vec{x}) \;=\; \vec{c} \cdot \vec{x} + \vec{c} \cdot \Delta\vec{x} \;=\; f(\vec{x}) + \vec{c} \cdot \Delta\vec{x}.$$

Ist $\Delta\vec{x}$ senkrecht zu $\vec{c}$, so ergibt sich keine Änderung des Zielfunktionswerts, sobald aber $\Delta\vec{x}$ ein bisschen in Richtung von $\vec{c}$ zeigt, ergibt sich eine Verbesserung.

Man kann also ausgehend von einem zulässigen Punkt in $\vec{c}$-Richtung gehen bis man an eine Kante stößt. Falls diese nicht senkrecht zu $\vec{c}$ ist, kann man auf der Kante „weiterrutschen“ und den Zielfunktionswert verbessern, bis man zu einer Ecke kommt. Ggf. erlaubt die nächste Kante eine weitere Verbesserung. Man endet schließlich in einer Ecke, die keine weitere Verbesserung mehr erlaubt. In Abbildung 1 kommt man so zum optimalen Punkt $(6, 4)$.

Ist eine Kante senkrecht zu $\vec{c}$, so haben alle Punkte auf dieser Kante den gleichen Zielfunktionswert, so dass man auch in diesem Fall auf der Kante zu einer Ecke „rutschen“ kann, ohne sich zu verschlechtern. Damit gilt: Falls das Optimierungsproblem eine Lösung besitzt, so gibt es immer eine Lösung in einer Ecke.

Im Dreidimensionalen beschreibt eine zu einer Ungleichung wie beispielsweie $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 4$ gehörige Gleichung eine Ebene (in Normalendarstellung):

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, x_1 + 2x_2 - 4x_3 \;=\; 4 \right\} \;=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{smallmatrix} \right) \;=\; 4 \right\}.$$

Durch die Ungleichung wird ein Halbraum definiert. Mehrere Ungleichungen beschreiben den Schnitt von Halbräumen. Der resultierende zulässige Bereich ist ein dreidimensionales Vieleck, ein sogenanntes *konvexes Polyeder* (falls beschränkt), ähnlich einem geschliffenen Diamanten.

Wie im Zweidimensionalen gibt nun der Zielfunktionsvektor $\vec{c}$ die Richtung vor, in die man möglichst weit gehen sollte, um eine Maximalstelle zu finden. Man kommt so ausgehend von einem zulässigen Punkt zu einer Seite, von dort zu einer begrenzenden Kante und von dort zu einer Ecke und ggf. über weitere Kanten zur optimalen Ecke.

Ähnlich kann man sich höherdimensionale Fälle vorstellen: Eine Gleichung definiert eine Hyperebene, eine entsprechende Ungleichung dann einen entsprechenden Halbraum, und der zulässige Bereich ergibt sich als Schnitt solcher Halbräume. Durch $\vec{c}$ wird die Optimierungsrichtung angegeben.

Bzgl. der Lösbarkeit/Lösungsmenge eines linearen Optimierungsproblems gibt es vier Fälle:

1. Der zulässige Bereich ist leer.
2. Der zulässige Bereich ist ein konvexes Polyeder.
3. Der zulässige Bereich ist unbeschränkt, aber es gibt eine Lösung (s. Abbildung 2 mit Zielfunktionsvektor $\vec{c}_1$).
4. Der zulässige Bereich ist unbeschränkt, und es gibt keine Lösung, da man beliebig große Werte der Zielfunktion erreichen kann (s. Abbildung 2 mit Zielfunktionsvektor $\vec{c}_2$).

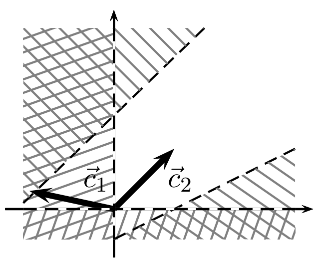

Abbildung 2: Unbeschränkter zulässiger Bereich.

In den Fällen 2. und 3. gibt es jeweils eine Ecke, in der die Zielfunktion optimal ist. (Ggf. gibt es ganze Kanten/Seiten, auf denen die Zielfunktion optimal ist.)

Das *Simplex-Verfahren* setzt die Idee, in Optimierungsrichtung von einem zulässigen Punkt zu einer Seite, von dort zu einer begrenzenden Kante und von dort zu einer Ecke und ggf. über weitere Kanten zur optimalen Ecke zu gehen, algorithmisch um. (Ein Simplex ist ein spezielles mehrdimensionales Vieleck.)

Es gibt Lösungsverfahren für lineare Optimierungsprobleme, die in polynomieller Zeit eine Lösung finden. Theoretisch hat das Simplex-Verfahren exponentielle Laufzeit, allerdings zeigt sich in praktisch allen realen Beispielen eine sehr schnelle Laufzeit, so dass man mit Hilfe des Simplex-Verfahrens Probleme mit mehreren Millionen Variablen lösen kann.

Eine Standardbibliothek, die das Verfahren implementiert, ist CPLEX.

4 Zulässiger Startpunkt

Im vorigen Kapitel wurde beschrieben, wie man ausgehend von einem zulässigen Punkt zu einem optimalen Punkt kommen kann. Es bleibt die Frage, wie man einen ersten zulässigen Punkt findet bzw. entscheiden kann, ob der zulässige Bereich leer ist. Diese Frage ist tatsächlich genauso „schwer“ wie die Optimierung selbst.

Zur Lösung kann man das *Initial-Point-Problem* (IPP) betrachten, das selbst wieder ein lineares Optimierungsproblem ist, bei dem man aber per Konstruktion einen ersten zulässigen Punkt kennt, und dessen Lösung Auskunft darüber gibt, ob das ursprüngliche Problem einen leeren zulässigen Bereich besitzt oder nicht, und im nichtleeren Fall einen zulässigen Punkt liefert.

Zur Erläuterung, wie das Initial-Point-Problem aus dem originalen Problem entsteht, wird die zweite Standardform eines linearen Optimierungsprolems entsprechend Kapitel 2 genutzt:

Originalproblem:

Finde ein $\vec{x}$ mit $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (mit $\vec{b} \geq 0$) und $\vec{x} \geq 0$.

(Es geht nur darum, einen zulässigen Punkt zu finden!)

Zugehöriges Initial-Point-Problem:

Minimiere $f(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$ unter der Nebenbedingung

$$A \cdot \vec{x} + \vec{y} \;=\; \vec{b}, \qquad \vec{x} \;\geq\; 0, \quad \vec{y} \;\geq\; 0.$$

Erläuterung:

1. Bei der Zielfunktionsberechnung werden sämtliche Komponenten von $\vec{y}$ aufsummiert. Die $\vec{x}$-Variablen werden gar nicht berücksichtigt.

   Als Skalarprodukt kann man dies beschreiben durch Multiplikation mit einem Vektor $\vec{c}$ der zunächst soviele Nullen besitzt wie $\vec{x}$ Komponenten hat, und dann Einsen entsprechend der Anzahl der Komponenten von $\vec{y}$, blockmäßig notiert:

   $$f(\vec{x}, \vec{y}) \;=\; \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}.$$

2. Die Nebenbedingung $A \cdot \vec{x} + \vec{y} \;=\; \vec{b}$ kann man formal durch die Blockmatrix-Struktur

   $$\begin{pmatrix} A \vdots I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} \;=\; \vec{b}$$

   (mit der Einheitsmatrix I entsprechend der Dimension von $\vec{y}$) darstellen.

Wegen der Nichtnegativitäts-Bedingung an $\vec{b}$ ist $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$ ein zulässiger Punkt.

Damit kann man den Simplex-Algorithmus starten und erhält eine Minimalstelle $\begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{y}^* \end{pmatrix}$.

Es gibt nun zwei Fälle:

1. Fall: $\vec{y}^* = \vec{0}$.

   Dann ist $A \cdot \vec{x}^* = \vec{b}$, also $\vec{x}^*$ ein zulässiger Punkt des originalen Problems.

2. Fall: $\vec{y}^* \neq \vec{0}$.

   Dann ist der entsprechende optimale Zielfunktionswert (Addition der y-Komponenten) größer als Null, da ja wegen der Nebenbedingung $\vec{y}^* \geq \vec{0}$ gilt, und mindestens eine Komponente ungleich Null ist.

   Daher kann es keinen zulässigen Punkt $\vec{x}$ für das Originalproblem geben, denn wäre $\vec{x}_0$ zulässig für das Originalproblem, so wäre $\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ zulässig für das Initial-Point-Problem und hätte mit dem Zielfunktionswert 0 einen kleineren Wert als $\begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{y}^* \end{pmatrix}$.

Bemerkung:

Die Bestimmung eines ersten zulässigen Punkts nennt man auch *Phase 1* beim Lösungsprozess.

5 Ganzzahlige Optimierung

Häufig hat man bei linearen Optimierungsproblemen Ganzzahligkeits-Bedingungen, d.h. $x_k \in \mathbb{Z}$. Anschaulich bedeutet das, dass man Gitterpunkte als zulässige Punkte besitzt (s. Abbildung 3).

Oft hat man auch eine „digitale“ Bedingung $x_k \in \{0, 1\}$, die beispielsweise daher kommen kann, dass man eine Entscheidung „ja oder nein“ treffen muss. Wegen

$$x_k \in \{0,1\} \quad \Leftrightarrow \quad x_k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad x_k \geq 0 \quad \text{und} \quad x_k \leq 1$$

ist sie ein Spezialfall einer Ganzzahligkeits-Bedingung.

Das zu einem linearen Optimierungsproblemen mit Ganzzahligkeits-Bedingungen *relaxierte* Problem bezeichnet das gleiche Problem ohne die Ganzzahligkeits-Bedingungen.

Runden einer Lösung des relaxierten Problems löst oft nicht das originale Problem, wie man an Abbildung 3 sehen kann. Im linken Bild führt Runden des bzgl. des relaxierten Problems optimalen Punkts P zum nicht-zulässigen Punkt $(2, 3)$; im rechten Bild erhält man durch Runden den Punkt $(2, 2)$, wobei allerdings in beiden Fällen der Punkt $(3, 2)$ die optimale Lösung des ganzzahligen Problems darstellt.

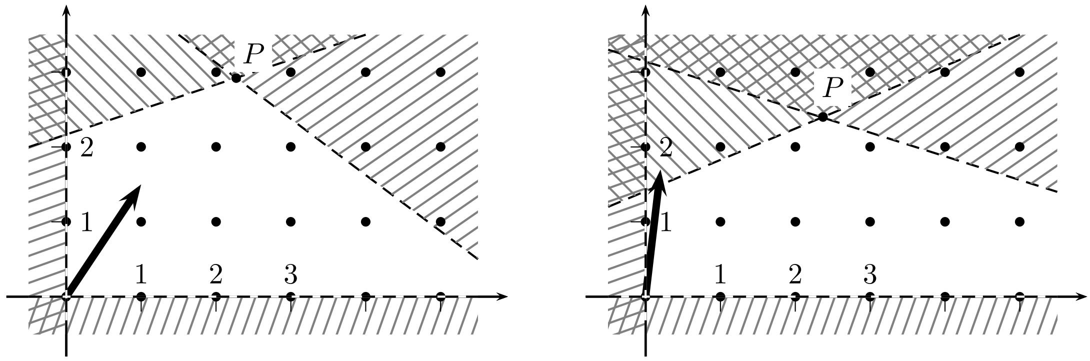

Abbildung 3: Ganzzahlige Optimierungsprobleme.

Im Gegensatz zu den reellen (nicht ganzzahligen) linearen Optimierungsproblemen ist zur Zeit kein Algorithmus mit polynomieller Laufzeit zur Lösung eines ganzzahligen Optimierungsproblems bekannt.

Branch-and-Bound-Verfahren zur Lösung:

Zur Bestimmung einer Lösung kann man ein *Branch-and-Bound-Verfahren* nutzen:

Ist bei der optimalen Lösung $\vec{x}_{opt} \in \mathbb{R}^n$ des relaxierten Problems eine Komponente $x_{i,opt} \notin \mathbb{Z}$, so kann man die Situation in zwei Fälle teilen („*Branchen*"), indem man zusätzlich eine Nebenbedingung für x_i einführt, die aussagt, dass x_i kleiner oder gleich des abgerundeten bzw. größer oder gleich des aufgerundeten optimalen Werts ist.

$$x_i \;\leq\; \lfloor x_{i,opt} \rfloor \qquad \text{bzw.} \qquad x_i \;\geq\; \lceil x_{i,opt} \rceil.$$

Mit dieser zusätzlichen Bedingung löst man dann das relaxierte Problem, d.h. in $\mathbb{R}^n$.

Ein optimaler Punkt des relaxierten Problems liefert eine obere Schranke S_{relax} für den Zielfunktionswert für alle ganzzahligen Punkte bei diesen Nebenbedingungen. Hat man einen ganzzahligen zulässigen Punkt, so liefert dieser eine untere Schranke S_{ganz} für den Zielfunktionswert des originalen Problems. Gilt $S_{relax} \leq S_{ganz}$, so kann man den entsprechenden Zweig verwerfen („*Bound*"). Es wird dort keine besseren ganzzahligen Punkte geben als den, den man schon kennt.

Beispiel:

Abbildung 4 zeigt einen möglichen Verzweigungsbaum:

Bild A stellt das ursprüngliche ganzzahlige Optimierungsproblem dar. Der optimale Punkt P_0 des relaxierten Problems hat unganzzahlige x_1- und x_2-Werte.

Für Bild B und C wurde in x_2-Richtung verzweigt: Bei Bild B wurde die Bedingung $x_2 \leq 2$ hinzugenommen, bei Bild C die Bedingung $x_2 \geq 3$, da der x_2-Wert von P_0 zwischen 2 und 3 liegt. Für jeden ganzzahligen Punkt gilt $x_2 \leq 2$ oder $x_2 \geq 3$, so dass jeder zulässige ganzzahlige Punkt in einem der beiden Fälle weiterhin enthalten ist.

Durch die Bedingung $x_2 \geq 3$ (Bild C) wird der zulässige Bereich leer, so dass dieser Zweig hier endet. Durch die Bedingung $x_2 \leq 2$ (Bild B) erhält man als optimalen Punkt des relaxierten Problems einen Punkt P_1 mit ganzzahliger x_2-Komponente aber unganzzahliger x_1-Komponente, so dass man in x_1-Richtung weiter verzweigt: Bei Bild D wurde die Bedingung $x_1 \leq 3$ hinzugenommen, bei Bild E die Bedingung $x_1 \geq 4$. Wieder gilt: Jeder ganzzahlige zulässige Punkt von Bild B ist in einem der beiden Fälle D bzw. E enthalten

Durch die Bedingung $x_1 \leq 3$ (Bild D) erhält man als optimalen Punkt des relaxierten Problems die ganzzahlige Stelle $(3, 2)$. Damit erhält man eine untere Schranke S_0 für den Zielfunktionswert. Ferner braucht man in diesem Ast nicht weiterzugehen.

Durch die Bedingung $x_1 \geq 4$ (Bild E) erhält man einen optimalen Punkt P_2, dessen x_2-Komponente wieder unganzzahlig ist. Bei entsprechendem Zielfunktionsvektor ist der Zielfunktionswert hier größer als S_0, so dass es noch möglich ist, dass es in diesem Zweig noch eine ganzzahlige Stelle mit Zielfunktionswert größer als S_0 gibt. Daher wird hier in x_2-Richtung weiter verzweigt: Bei Bild F wurde die Bedingung $x_2 \leq 1$ hinzugenommen, bei Bild G die Bedingung $x_2 \geq 2$.

Durch die Bedingung $x_2 \geq 2$ (Bild G) wird der zulässige Bereich leer, so dass dieser Zweig hier endet. Durch die Bedingung $x_2 \leq 1$ (Bild F) erhält man den Punkt P_3 als optimalen Punkt des relaxierten Problems. Bei entsprechendem Zielfunktionsvektor ist der Zielfunktionswert hier kleiner als S_0. Damit ist klar, dass es in diesem Zweig auch keinen ganzzahligen Punkt mit Zielfunktionswert größer als S_0 gibt, so dass dieser Ast nicht weiter verfolgt zu werden braucht.

Damit sind alle Äste abgearbeitet und $(3, 2)$ als optimaler Punkt bestimmt.

Wie man im Beispiel sieht, kann es vorkommen, dass man mehrmals bzgl. der gleichen Variablen verzweigen muss.

Dass das Verfahren im Allgemeinen exponentielle Laufzeit hat, sieht man daran, dass man ggf. nach Verzweigen bzgl. der ersten Variablen in jedem Zweig auch bzgl. der zweiten Variablen verzweigen muss, dann in jedem nach der dritten Variablen u.s.w., so dass man bei n Variablen 2^n Zweige erhält.

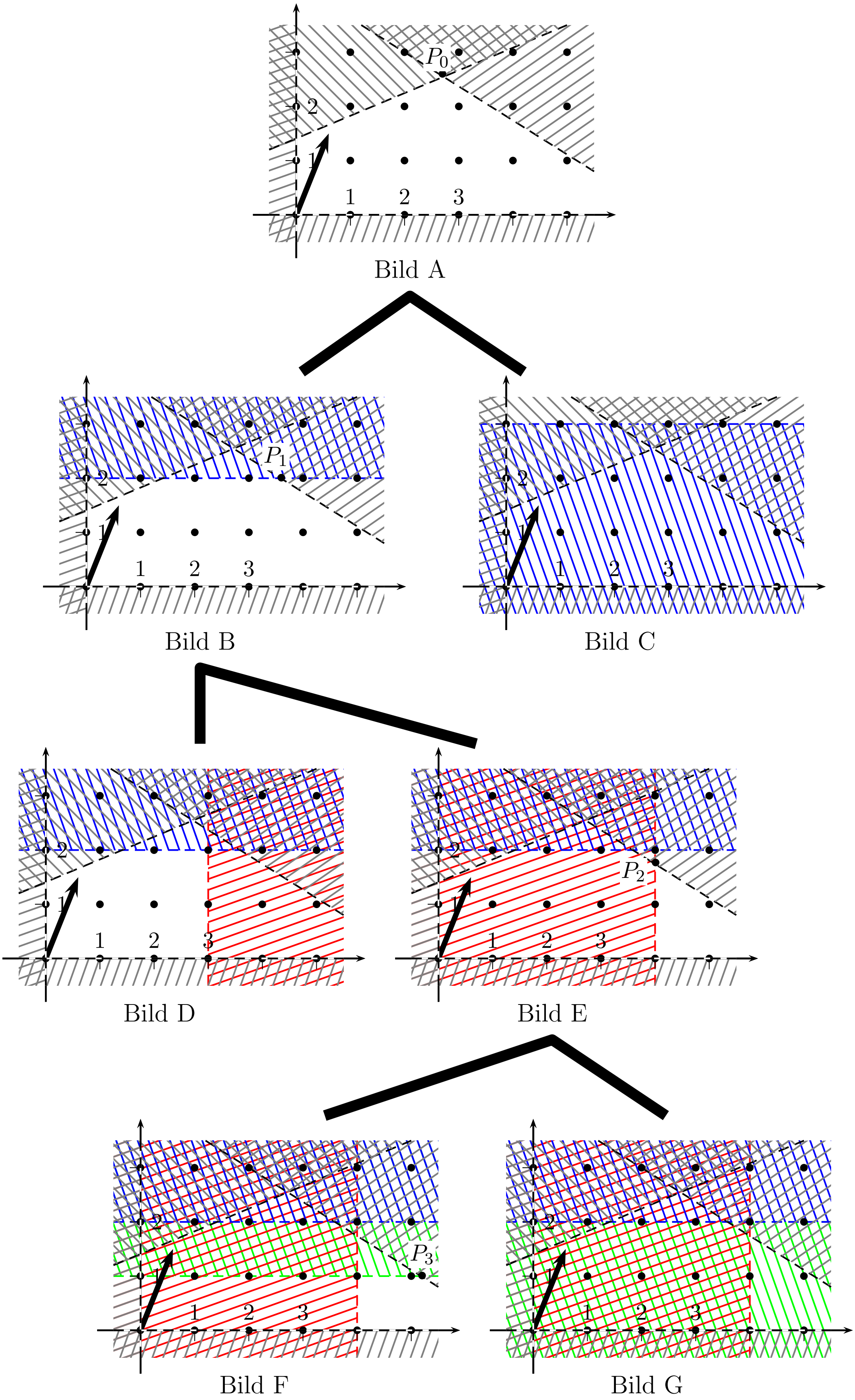

Abbildung 4: Verzweigungsbaum.