Komplexität

Prof. Georg Hoever
Fachbereich Elektro- und Informationstechnik
FH Aachen
Eupener Str. 70, 52066 Aachen
Telefon 0241 6009 52178
hoever@fh-aachen.de, www.hoever.fh-aachen.de

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Problemklassen

Definition:

P := { Probleme, die in polynomieller Zeit lösbar sind}

Genauer:

- Entscheidungsprobleme
- in poly. Zeit von einer deterministischen Turing-Maschine lösbar

Beispiele:

- Ist ein Graph eulersch?
- Finde MST.

  Genauer: Hat ein MST ein Gewicht $\leq$ c.

- LP-Probleme.

Problemklassen

Definition:

NP := { (Entscheidungs-) Probleme, die in polynomieller Zeit von einer nichtdeterministischen Turing-Maschine lösbar sind}

Äquivalent:

NP = { (Entscheidungs-) Probleme | zu einer positiven Antwort gibt es eine Begründung, die in polynomieller Zeit von einer deterministischen Turing-Maschine überprüft werden kann.}

Beispiele:

- Ist ein Graph eulersch?
- Ist ein Graph hamiltonsch?
- Finde optimale TSP-Tour.

  Genauer: Hat eine optimale TSP-Tour ein Gewicht $\leq$ c.
- Finde zulässigen Punkt für ganzzahliges LP.

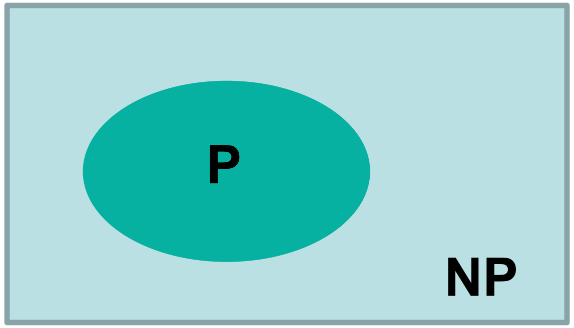
Problemklassen

Offensichtlich:

$$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$$

Bisher offen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{NP}\ ?$$



Polynomielle Reduktion

Definition:

Ein Problem L heißt **polynomiell reduzierbar** auf L‘ ($L \prec_p L'$)

$\Leftrightarrow$ Man kann L in polynomieller Zeit in eine Instanz von L‘ umformen, so dass man aus einer Lösung von L‘ die Lösung von L ableiten kann.

$$\underset{L}{\bullet} \xleftarrow{\prec_p} \underset{L'}{\bullet}$$

„wenn man L‘ lösen kann, dann auch L

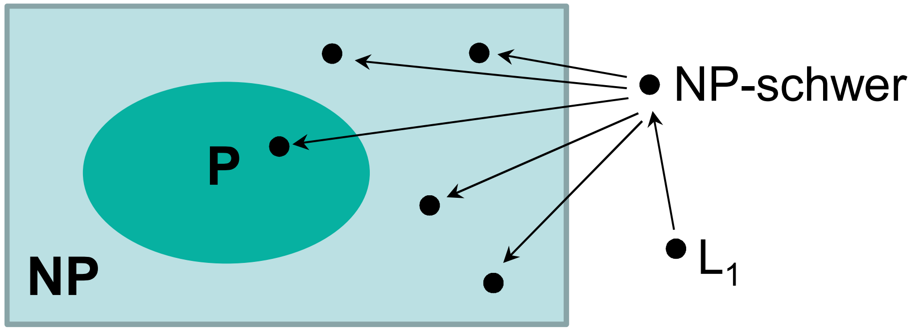
Beispiele:

- „Ist ein Graph hamiltonsch?“ $\prec_p$ „Finde optimale TSP-Tour.“

NP-schwer und NP-vollständig

Definition:

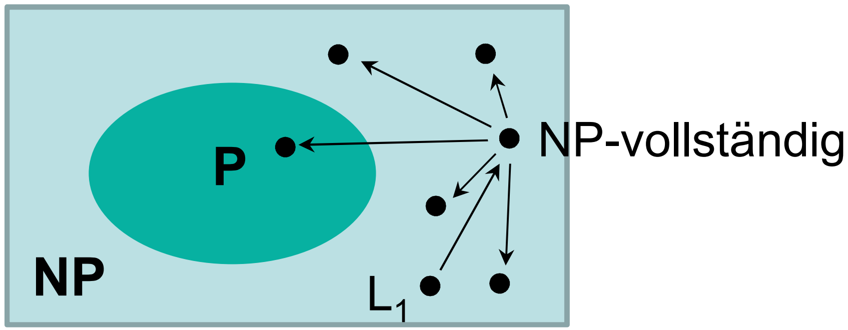
- Ein Problem L_0 heißt **NP-schwer** $\Leftrightarrow$ $\forall L \in NP : L \prec_p L_0$
- Ein Problem L_0 heißt **NP-vollständig** $\Leftrightarrow$ $L_0 \in NP$ und L_0 ist NP-schwer.



Gibt es NP-schwere / -vollständige Probleme?

L_0 NP-schwer und $L_0 \prec_p L_1$

$\Rightarrow L_1$ NP-schwer



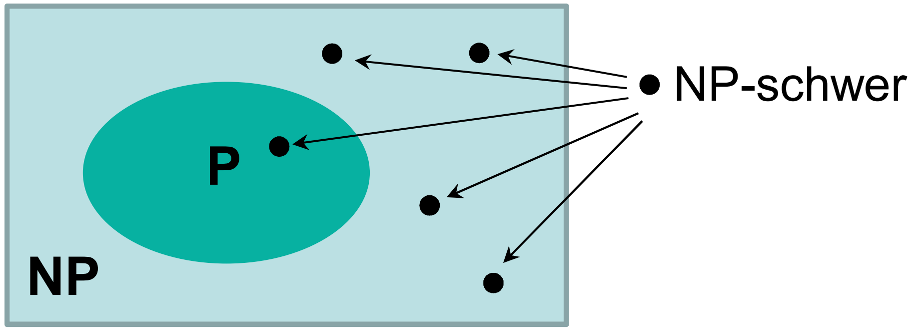
L_0 NP-vollständig oder NP-schwer,
$L_0 \prec_p L_1$ und $L_1 \in NP$

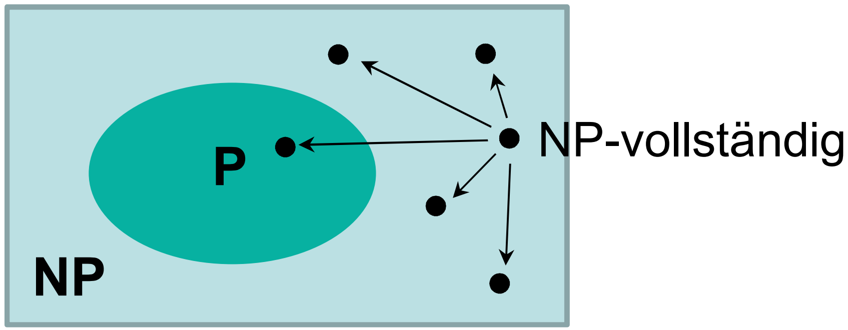
$\Rightarrow L_1$ NP-vollständig

NP-schwer und NP-vollständig

Definition:

- Ein Problem L_0 heißt **NP-schwer** $\Leftrightarrow$ $\forall L \in NP : L \prec_p L_0$
- Ein Problem L_0 heißt **NP-vollständig** $\Leftrightarrow$ $L_0 \in NP$ und L_0 ist NP-schwer.





Gibt es NP-schwere / -vollständige Probleme?

Ja!

Beispiele für NP-vollständig:

- Ist ein Graph hamiltonsch?
- Finde zulässigen Punkt für ganzzahliges LP.

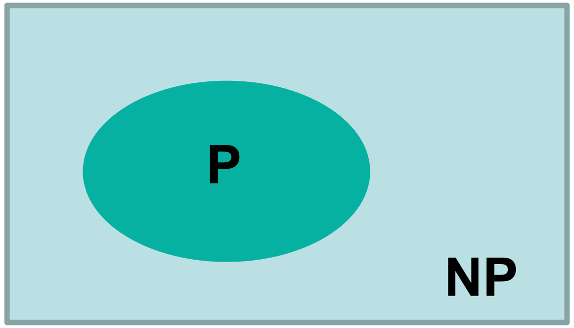
Problemklassen

Offensichtlich:

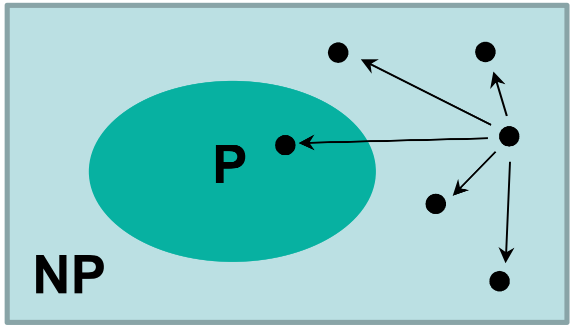
$$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$$

Bisher offen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{NP}\ ?$$



Kann man für ein NP-vollständiges Problem L zeigen, dass L ∈ P gilt, so ist P=NP.



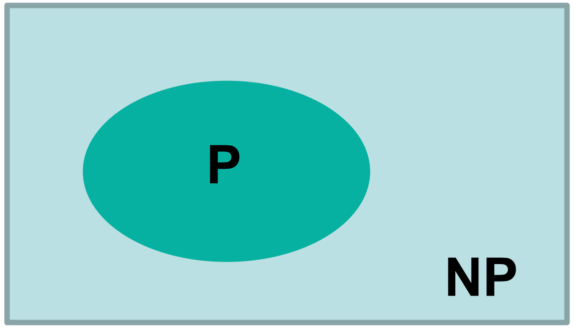
Problemklassen

Offensichtlich:

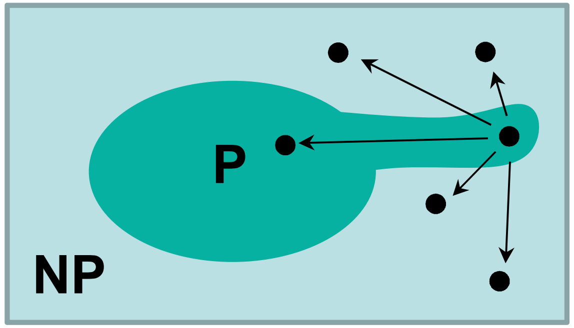
P $\subseteq$ **NP**

Bisher offen:

P $=$ **NP** ?



Kann man für ein NP-vollständiges Problem L zeigen,
dass L $\in$ P gilt, so ist P=NP.



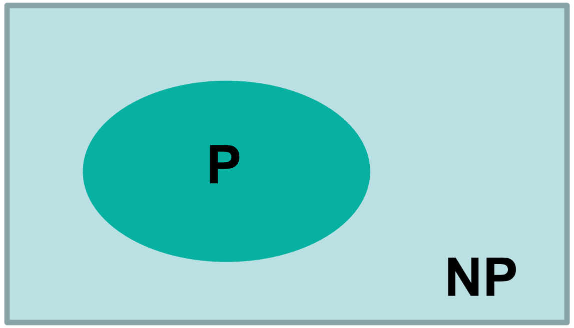
Problemklassen

Offensichtlich:

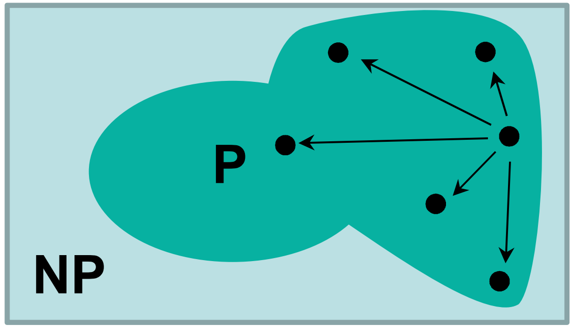
$$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$$

Bisher offen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{NP}\ ?$$



Kann man für ein NP-vollständiges Problem L zeigen, dass L $\in$ P gilt, so ist P=NP.



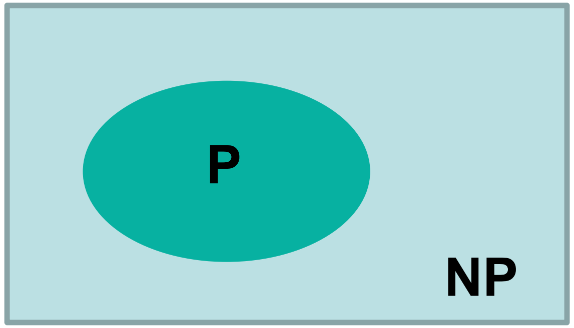
Problemklassen

Offensichtlich:

P $\subseteq$ **NP**

Bisher offen:

P $=$ **NP** ?



Kann man für ein NP-vollständiges Problem L zeigen, dass L $\in$ P gilt, so ist P=NP.