FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2025
17.04.2025

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Aufgabe 1

Berechnen Sie

a) $\int\limits_D (x^2 - xy^2)\ \mathrm{d}(x,y)$ zu $D = [0,3] \times [0,1]$,

b) $\int\limits_D x \cdot \cos(xy)\ \mathrm{d}(x,y)$ zu $D = [0,\pi] \times [0,1]$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie

$$\int\limits_D \frac{2z}{(x+y)^2}\ \mathrm{d}(x,y,z) \qquad \text{mit } D = [1,2] \times [2,3] \times [0,2] \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Verifizieren Sie, dass der Wert des Integrals unabhängig von der Reihenfolge der Integrationen ist, indem Sie verschiedene Reihenfolgen ausprobieren.

Aufgabe 3

a) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a,b] \times [c,d]$.

Zeigen Sie:

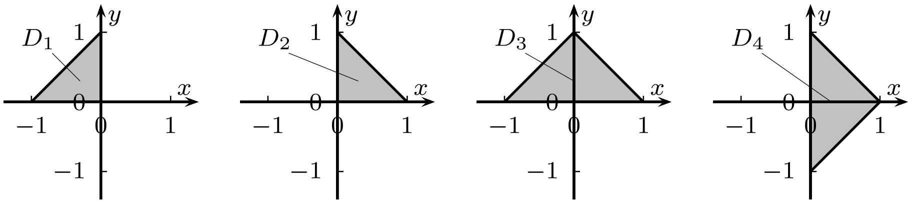
$$\int\limits_D f(x) \cdot g(y)\ \mathrm{d}(x,y) = \left(\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int\limits_c^d g(y)\ \mathrm{d}y \right).$$

b) Nutzen Sie die Formel aus a) zur Berechnung von

$$\int\limits_D x^2 \cdot \sin(y)\ \mathrm{d}(x,y) \qquad \text{mit } D = [1,2] \times [0,\pi].$$

Aufgabe 4 (beispielhafte Klausuraufgabe, 6 Minuten)

Betrachtet werden die vier jeweils grau dargestellten Integrationsbereiche D_k im $\mathbb{R}^2$



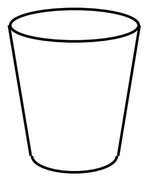
und die entsprechenden Integralwerte

$$I_k \;=\; \int\limits_{D_k} xy^2 \,\mathrm{d}(x,y) \qquad (k = 1, \ldots, 4).$$

Sortieren Sie die Werte I_k der Größe nach.

Begründen Sie Ihre Anordnung! (Sie brauchen die I_k nicht zu berechnen!)

Aufgabe 5



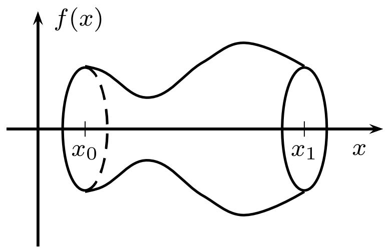
Ein Joghurtbecher hat eine Höhe von 8cm. Der Radius der Bodenfläche beträgt 2cm, beim Deckel sind es 3cm.

Welches Volumen hat der Becher?

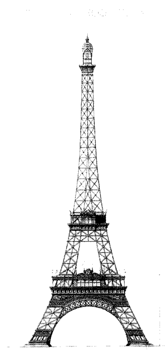
Aufgabe 6

Überlegen Sie sich, dass das Volumen V eines Rotationskörpers mit der Mantellinie $f(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, berechnet werden kann durch

$$V \;=\; \pi \int\limits_{x_0}^{x_1} \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x.$$



Aufgabe 7



In der Seitenansicht beschreibt der Eiffelturm angenähert eine Kurve der Form

$$f(h) \;=\; A \cdot \mathrm{e}^{-Bh}$$

mit $A = 64.5\,\mathrm{m}$, $B = 0.01\,\mathrm{m}^{-1}$ und $h \in [0, 300\,\mathrm{m}]$.

Berechnen Sie das Volumen, das von dem Turm eingenommen wird.

Bildquelle:
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/Entwurf_Eiffelturm_-_Stephan_Sauvestre_%281887%29.jpg

Aufgabe 8

Sei K_R der Kreis in $\mathbb{R}^2$ um $(0,0)$ mit Radius R. Berechnen Sie

a) $\int\limits_{K_2} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$,

b) $\int\limits_{K_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ mit $f = f(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten ausgedrückt durch

$$f(r,\varphi) \;=\; r \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 9

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert von $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ zu bestimmen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

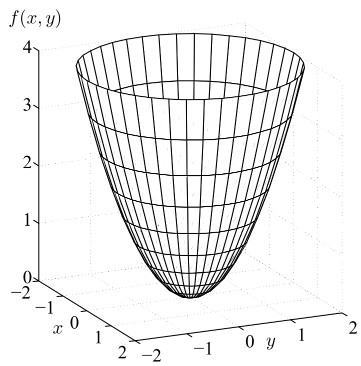
a) Zeigen Sie $A^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$, indem Sie den Integranden als Produkt schreiben und die Formel aus Aufgabe 3 nutzen.

b) Berechnen Sie $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$ durch Integration in Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie nun den Wert von A.

Aufgabe 10

Berechnen Sie das Volumen des abgebildeten Kelches mit Höhe 4 und oberen Radius 2, der formelmäßig durch $f(x,y) = x^2 + y^2$ beschrieben wird,



a) mit Hilfe einer Integration in Polarkoordinaten,

(Achtung: Gesucht ist nicht das Volumen unter der Kurve sondern der Kelchinhalt!),

b) durch Integration der Flächen horizontaler Schnitte.

Wie wird der Kelch bei den Berechnungen in a) bzw. b) jeweils "zerlegt"?