

Aufgabe 1

Ind. Anf.: $n=0$:

$$a_0 = 2 = 1 + 1 = 3^0 + 1 \quad \checkmark$$

Ind. Schritt: $n \leadsto n+1$

Ind. Vor.: $a_n = 3^n + 1$

zu zeigen: $a_{n+1} = 3^{n+1} + 1$

$$\text{Es gilt: } a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} 3a_n - 2$$

$$\stackrel{\text{i.V.}}{=} 3 \cdot (3^n + 1) - 2$$

$$= 3 \cdot 3^n + 3 - 2$$

$$= 3^{n+1} + 1 \quad \checkmark$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Auf $\mathbb{R}$ werden die folgenden beiden Relationen S und T betrachtet:

a) $(x, y) \in S \Leftrightarrow |x - y| > 3,$

b) $(x, y) \in T \Leftrightarrow y = x^2.$

Sind S bzw. T *nicht* reflexiv, *nicht* transitiv, *nicht* symmetrisch bzw. *nicht* antisymmetrisch? Geben Sie dazu in der folgenden Tabelle bei den *nicht* erfüllten Eigenschaften jeweils eine kurze Begründung mittels eines Gegenbeispiels an.

	S	T
nicht reflexiv	$(1, 1) \notin S$	$(2, 2) \notin T$
nicht transitiv	$(0, 5) \in S$ und $(5, 1) \in S$ aber $(0, 1) \notin S$	$(2, 4) \in T$ und $(4, 16) \in T$ aber $(2, 16) \notin T$
nicht symmetrisch		$(2, 4) \in T$ aber $(4, 2) \notin T$
nicht antisymmetrisch	$(0, 5) \in S$ und $(5, 0) \in S$ aber $0 \neq 5$	

Aufgabe 3

$$a) J_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy} + xy e^{xy} & x^2 e^{xy} \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) 1. \text{ Schritt: } J_f(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -f(1, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

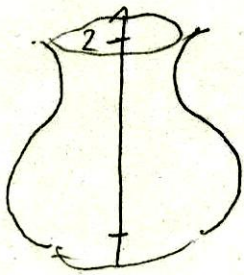
$$2. \text{ Schritt: } J_f(2, 0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -f(2, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \frac{1}{-17} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{17} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{17} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{17} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4



$$V = \int_0^2 \pi \cdot (f(z))^2 dz$$

$$= \int_0^2 \pi \left(1 + \frac{1}{2} \sin(\pi z) \right)^2 dz$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 \left(1 + \underbrace{\sin(\pi z)}_{\text{Sym.}} + \frac{1}{4} \sin^2(\pi z) \right) dz$$

$$= \pi \cdot \left[2 + 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right]$$

$$= \frac{9}{4} \pi \quad (\text{Einheit } \text{dm}^3 = \text{Liter})$$

Aufgabe 5

a) $y(x) = c \cdot x^{-1}$

$$y'(x) = -c \cdot x^{-2}$$

$$y''(x) = 2 \cdot c \cdot x^{-3}$$

$$y'''(x) = -6 \cdot c \cdot x^{-4}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} -6 \cdot c \cdot x^{-4} &= c \cdot x^{-1} \cdot 2 \cdot c \cdot x^{-3} - (-c \cdot x^{-2})^2 \\ &= 2c^2 \cdot x^{-4} - c^2 \cdot x^{-4} \\ &= c^2 \cdot x^{-4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -6c = c^2$$

$$\Leftrightarrow c = 0 \text{ oder } c = -6.$$

b) $y_0 = y, y_1 = y', y_2 = y''$

$$\Rightarrow y_0' = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y''' = y \cdot y'' - (y')^2 = y_0 \cdot y_2 - y_1^2$$

$$y_0(0) = 1$$

$$y_1(0) = -2$$

$$y_2(0) = 3$$

$$y_0(0.1) = y_0(0) + 0.1 \cdot y_0'(0) = 1 + 0.1 \cdot (-2) = 0.8$$

$$y_1(0.1) = y_1(0) + 0.1 \cdot y_1'(0) = -2 + 0.1 \cdot 3 = -1.7$$

$$y_0(0.2) = y_0(0.1) + 0.1 \cdot y_0'(0.1) \approx 0.8 + 0.1 \cdot (-1.7) = 0.63$$

$$y_1(0.1)$$

Aufgabe 6 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der Bilder werden durch die übliche Fourierreihe mit den angegebenen Fourierkoeffizienten dargestellt? Alle nicht angegebenen Fourierkoeffizienten sind jeweils gleich Null.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung“ (1.5 Punkte) an.

a) $b_1 = 2, \quad a_2 = 0.2$

			Enthal- tung
	X		

b) $b_1 = 0.3, \quad b_5 = 1$

			Enthal- tung
	X		

c) $a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 0.5, \quad b_3 = -0.5$

			Enthal- tung
		X	

d) $a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -0.5, \quad a_4 = 0.5$ (Tipp: Symmetrie!)

			Enthal- tung
		X	

Aufgabe 7

a) Da die f_n reell sind, ist

$$c_3 = c_{4-1} = c_1^* = (1+3j)^* = 1-3j$$

b) $c_{41} = c_1 = 1+3j$

c) $a_0 = c_0 = 2$

$$a_1 = \operatorname{Re}(c_1) = 1$$

$$b_1 = -\operatorname{Im}(c_1) = -3$$

$$a_2 = c_2 = 0$$

Aufgabe 8

a) 5-faches Binomialexperiment mit Erfolgsw' $p=0,2$

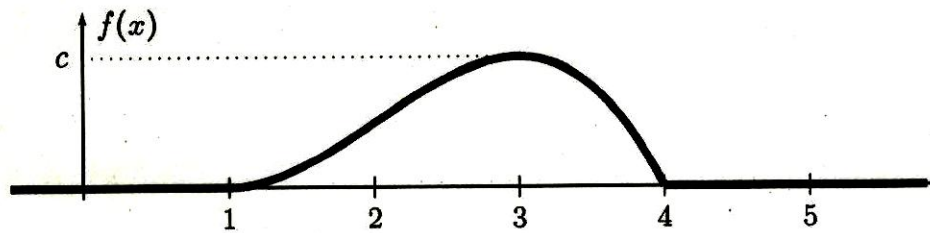
$$\begin{aligned} W'(\text{genau 2 Erfolge}) &= \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 \\ &= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) W'(\text{genau einer}) &= W'(\text{Anton und kein andere}) \\ &\quad + W'(\text{nicht Anton und genau einer der anderen}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0,4 \cdot 0,8^4 + 0,6 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8^3 \\ &= 0,16384 + 0,24576 = 0,4096 \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable, die Werte im Intervall $[1; 4]$ annimmt, und die die im Bild skizzierte Dichte $f(x)$ (mit Maximalwert c an der Stelle 3) besitzt.



Markieren Sie den jeweils richtigen (gerundeten) Zahlenwert für die angegebenen Größen (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt).

Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

c		$P(X < 3)$		$P(X = 3)$		$E(X)$		Std.abw. von X	
0.25	☒	0.4	☐	0	☒	2.3	☐	0.1	☐
0.59	☒	0.5	☐	c	☐	2.5	☐	0.6	☒
1	☐	0.6	☒	0.5	☐	2.8	☒	1.8	☐
1.33	☐	1	☐	1	☐	3	☐	2	☐
Enth.	☐	Enth.	☐	Enth.	☐	Enth.	☐	Enth.	☐

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Mit $P_{\mu,\sigma}(]a,b[)$ wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ einen Wert im Intervall $]a,b[$ annimmt.

Geben Sie in der folgenden Tabelle die jeweils fehlenden Werte so an, dass $P_{\mu,\sigma}(]a,b[)$ gleich der links dargestellten Wahrscheinlichkeit ist.

	μ	σ	a	b
$P_{1,3}(]-2,7[)$	2	4	-2	10
$P_{1,2}(]1,5[)$	0	4	0	8
$P_{0,1}(]1,\infty[)$	4	3	$-\infty$	1