

Aufgabe 1 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die rekursiven Definitionen

$$a_0 = 8, \quad a_{n+1} = 4 \cdot a_n - 7,$$

$$b_0 = 4, \quad b_{n+1} = 2 \cdot b_n + 1,$$

$$c_0 = 3, \quad c_{n+1} = 3 \cdot c_n - 2$$

sowie die drei (richtigen oder falschen) Behauptungen

$$a_n = 6 \cdot 4^n + 2,$$

$$b_n = 3 \cdot 2^n - 1,$$

$$c_n = 2 \cdot 3^n + 1.$$

Welcher Beweisteil (Induktionsanfang bzw. Induktionsschluss) gelingt oder gelingt nicht, wenn man die Aussagen versucht, mit vollständiger Induktion zu beweisen?

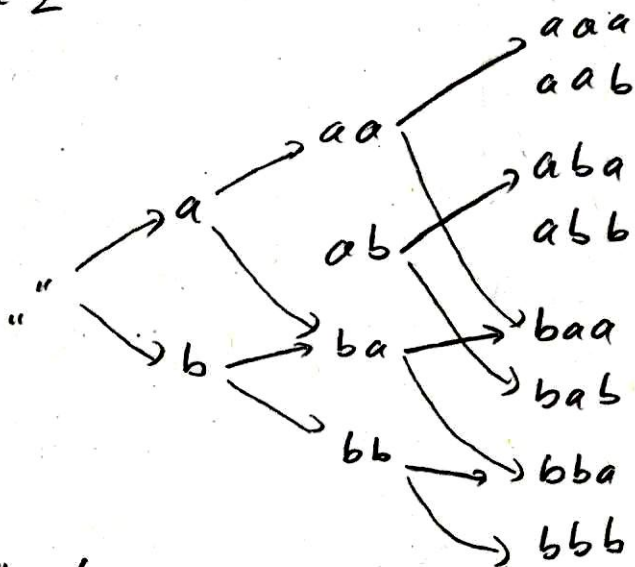
Kreuzen Sie die richtige Antwort oder „Enthaltung“ an. Beim „Induktionsanfang“ zählt eine richtige Antwort 1 Punkt und Enthaltung 0,5 Punkte, beim „Induktionsschluss“ zählt eine richtige Antwort 3 Punkte und Enthaltung 1,5 Punkte.

Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.

	Induktionsanfang			Induktionsschluss		
	gelingt	gelingt nicht	Enth.	gelingt	gelingt nicht	Enth.
für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$	X				X	
für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$		X		X		
für $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$	X			X		

Aufgabe 2

a)



$\neq "$ und

b) ✓ Beliebig viele 'b' gefolgt von beliebig vielen 'a'.

c) aba, ab
bab

Aufgabe 3

$$\text{grad } f(x, y) = (y - 3x^2, x + 2 - 2y)$$

$$\text{speziell } \text{grad } f(1, 1) = (-2, 1)$$

$$f(1, 1) = 1$$

$$(1, 1) + 1 \cdot (-2, 1) = (-1, 2)$$

$$f(-1, 2) = -2 + 4 + 1 - 8 = -5 < f(1, 1)$$

$$\rightarrow \lambda \text{ halbieren: } \lambda = \frac{1}{2}$$

$$(1, 1) + \frac{1}{2} \cdot (-2, 1) = (0, 1.5)$$

$$f(0, 1.5) = 0 + 3 - 0 - 2.25 = 0.75 < f(1, 1)$$

$$\rightarrow \lambda \text{ halbieren: } \lambda = \frac{1}{4}$$

$$(1, 1) + \frac{1}{4} \cdot (-2, 1) = (0.5, 1.25)$$

$$f(0.5, 1.25) = 1.4375 > f(1, 1)$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = (0.5, 1.25), \quad \lambda_1 = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 4

a) $f(x, y) = \sin(x) + x \cdot \sin(y) + \frac{1}{2} x^2 y^2 + y^2$

b) Es ist grad $f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f \right)$.

Nach dem Satz von Schwarz ist $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$.

Hier ist $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot e^{xy}) = x^2 \cdot e^{xy}$
 $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} (e^{x \cdot y^2}) = y^2 \cdot e^{xy^2} //$

Aufgabe 5

$$\int \cos(x^2 + y^2 + c) d(x, y)$$

$$\stackrel{K_2}{=} \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(r^2 + c) r d\varphi dr$$

$$= \int_{r=0}^2 2\pi \cdot \cos(r^2 + c) r dr$$

$$= \pi \cdot \sin(r^2 + c) \Big|_0^2$$

$$= \pi \cdot (\sin(4 + c) - \sin(c))$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} y'(1) &= y(1) \cdot 1 + 1 \\ &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(1,1) &\approx y(1) + 0,1 \cdot y'(1) \\ &= 2 + 0,1 \cdot 3 = 2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(1,1) &= y(1,1) \cdot 1,1 + 1,1 \\ &\approx 2,3 \cdot 1,1 + 1,1 = 3,63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(1,2) &\approx y(1,1) + 0,1 \cdot y'(1,1) \\ &\approx 2,3 + 0,1 \cdot 3,63 = 2,663 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(1,2) &= y(1,2) \cdot 1,2 + 1,2 \\ &\approx 2,663 \cdot 1,2 + 1,2 = 4,3956 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(1,3) &\approx y(1,2) + 0,1 \cdot y'(1,2) \\ &\approx 2,663 + 0,1 \cdot 4,3956 = 3,10256 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (10 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Betrachtet wird eine 2π -periodische Funktion f sowie ihre Fourierreihe mit den üblichen Fourierkoeffizienten a_0 , a_n und b_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kreuzen Sie in den Spalten der folgenden Tabellen jeweils die richtige Antwortmöglichkeit oder „Enthaltung“ an.

Bei a) zählt die richtige Antwort 2 Punkte und „Enthaltung“ 1 Punkt; bei b) und c) zählt die richtige Antwort 1,5 Punkte und „Enthaltung“ 0,5 Punkte.

a)

	Wenn $a_0 < 0$ ist, so ist f überall negativ.	Wenn f überall negativ ist, so ist $a_0 < 0$.
Stimmt.		☒
Stimmt nicht.	☒	
Enthaltung		

b)

	Wenn f gerade ist,	Wenn f ungerade ist,
so sind alle a_n und b_n mit geradem n gleich 0		
so sind alle a_n und b_n mit ungeradem n gleich 0		
so sind alle a_n gleich 0		☒
so sind alle b_n gleich 0	☒	
Enthaltung		

c)

	Wenn f konstant ist,	Wenn $f(x) = \sin(x+1)$ ist,
so sind alle a_n und b_n gleich 0	außer a_0	☒
	außer a_1	
	außer b_1	
	außer a_1 und b_1	☒
	Enthaltung	

Aufgabe 8

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{8}} (f_0 + f_1 + \dots + f_7) = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot 3$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} (2 \cdot 1 + 3 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{8}} + 0 + 0 + (-2) \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot 4}{8}} + 0 + 0 + 0)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{8}} (2 + 3 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j) + (-2) \cdot (-1))$$

$$= \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} j$$

$$= \sqrt{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} j$$

Aufgabe 9

$$a) P(\text{Tor in } [0, 30 \text{ min}]) = \int_0^{30 \text{ min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt$$

$$= -e^{-\lambda t} \Big|_0^{30 \text{ min}} = -e^{-0,04 \cdot 30} + e^0 = 1 - e^{-1,2} \approx 0,6988$$

$$b) 0,6 = \int_0^{45 \text{ min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^{45 \text{ min}} = -e^{-\lambda \cdot 45 \text{ min}} + 1$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda \cdot 45 \text{ min}} = 0,4 \Rightarrow -\lambda \cdot 45 \text{ min} = \ln(0,4)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,4)}{45} \text{ min}^{-1} \approx 0,02 \text{ min}^{-1}$$

$$c) 30 \text{ min} = E(x) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{30} \text{ min}^{-1} \approx 0,033 \text{ min}^{-1}$$

$$d) P(\text{Mannschaft 1 mindestens 1 Tor und M. 2 kein Tor})$$

$$= P(X_1 \in [0, 90 \text{ min}]) \cdot (1 - P(X_2 \in [0, 90 \text{ min}]))$$

$$= \int_0^{90 \text{ min}} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} dt \cdot \left(1 - \int_0^{90 \text{ min}} \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 t} dt \right)$$

$$= -e^{-\lambda_1 t} \Big|_0^{90 \text{ min}} \cdot \left(1 - \left(-e^{-\lambda_2 t} \Big|_0^{90 \text{ min}} \right) \right)$$

$$= (-e^{-0,01 \cdot 90} + 1) \cdot (1 - (-e^{-0,02 \cdot 90} + 1))$$

$$= (1 - e^{-0,9}) \cdot e^{-1,8}$$

$$\approx 0,098$$

e) Beim größeren λ ist $E(x)$ kleiner, d.h. es passiert im Durchschnitt eher etwas, also mehr Tore.

$\Rightarrow$ Die Mannschaft mit größerem λ hat größere Gewinnwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 10

$$\bar{x} = \frac{1}{9} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 15) = 4$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{9} (4 \cdot (1-4)^2 + 2 \cdot (3-4)^2 + 1 \cdot (5-4)^2 + 1 \cdot (6-4)^2 + 1 \cdot (15-4)^2) \\ &= \frac{1}{9} (4 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 121) \\ &= \frac{164}{9} = 20.5 \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{20.5} \approx 4.528$$

$$\text{Median} = 3$$