Aufgabe 1

a) Es ist $(0,1) \in S$ und $(1,2) \in S$, aber $(0,2) \notin S$

b) Es ist $(0,1) \in S$ und $(1,0) \in S$, aber $0 \neq 1$

c) Ind. Anf: $n=1$

$(0,1) \in S^1 = S$, da $|0-1| = 1 \leq 1$ ✓

Ind Schritt: $n \to n+1$

Ind. Vor: $(0,n) \in S^n$

zu zeigen: $(0,n+1) \in S^{n+1}$

Es gilt nach I.V. $(0,n) \in S^n$

und $(n,n+1) \in S$

$\Rightarrow (0,n+1) \in S^{n+1}$

Aufgabe 2

a) Gesucht ist eine Nullstelle von

$$g(x,y) = f(x,y) - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(xy) - x - 2 \\ x^2 - y + 3 \end{pmatrix}$$

Es ist $g'(x,y) = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(xy) - 1 & x \cdot \cos(xy) \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

Für einen Newton-Schritt sucht man $(\Delta x, \Delta y)$ mit

$$g'(1,0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -g(1,0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{LGS} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +2\cdot\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\mathrm{II} \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \text{ also } \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $f(0.9; 0,1) = f(1-0,1; 0+0,1) \approx f(1,0) + f'(1,0) \cdot \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

Dabei ist $f'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) - 1 & x \cdot \cos(xy) \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

also $f(0,9; 0,1) \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$\int_D (x+y)\cdot \cos(xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_D x\cdot \cos(xy)\, d(x,y) + \int_D y\cdot \cos(xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^{1/2}\int_{y=0}^{\pi} x\cdot \cos(xy)\, dy\, dx + \int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{1/2} y\cdot \cos(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{\pi} dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(xy)\Big|_{x=0}^{1/2} dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(\pi x)\, dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}y)\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^{1/2} + \left(-2\cdot \cos(\tfrac{1}{2}y)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\big(\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} - 1\big) - 2\cdot\big(\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} - 1\big)$$

$$= \frac{1}{\pi} + 2$$

Aufgabe 4

Sei $y_0 = y$ $\qquad y_0' = y' = y_1$

$y_1 = y'$ $\quad \Rightarrow \quad y_1' = y'' = x^2 + y'y\,x$

$= x^2 + y_1 \cdot y_0 \cdot x$

Die AB werden zu $y_0(1) = y(1) = 2$

$y_1(1) = y'(1) = 3$

1. Schritt:

$$y_0(1{,}1) \approx y_0(1) + 0{,}1 \cdot y_0'(1) = \overbrace{y_0(1)}^{=2} + 0{,}1 \cdot \overbrace{y_1(1)}^{=3} = 2{,}3$$

$$y_1(1{,}1) \approx y_1(1) + 0{,}1 \cdot y_1'(1) = y_1(1) + 0{,}1 \cdot (1^2 + y_1(1) \cdot y_0(1) \cdot 1)$$

$$= 3 + 0{,}1 \cdot (1 + 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$= 3{,}7$$

2. Schritt (reicht für y_0):

$$y_0(1{,}2) \approx y_0(1{,}1) + 0{,}1 \cdot y_0'(1{,}1)$$

$$\approx 2{,}3 + 0{,}1 \cdot y_1(1{,}1)$$

$$\approx 2{,}3 + 0{,}1 \cdot 3{,}7$$

$$= 2{,}67$$

$\Rightarrow y(1{,}2) \approx 2{,}67$

Aufgabe 5

a) $$a_1 = \frac{2}{6} \cdot \left(1 \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi \cdot 0}{6}\right) + 4 \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi \cdot 1}{6}\right) + 0 \cdot \ldots \right.$$
$$\left. + 3 \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi \cdot 3}{6}\right) + (-2) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi \cdot 4}{6}\right) + 0 \cdot \ldots \right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} + 4 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + 3 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - 2 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)}_{=-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2 - 3 + 1\right)$$
$$= \frac{1}{3}$$

b) $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$

c) $$c_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 \cdot e^{-j\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 3}{6}} + 4 \cdot e^{-j\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 3}{6}} + 0 \cdot \ldots \right.$$
$$\left. + 3 \cdot e^{-j\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 3}{6}} + (-2) \cdot e^{-j\frac{2\pi \cdot 4 \cdot 3}{6}} + 0 \cdot \ldots \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 \cdot \underbrace{e^{0}}_{=1} + 4 \cdot \underbrace{e^{-j\pi}}_{=-1} + 3 \cdot \underbrace{e^{-3j\pi}}_{=-1} - 2 \cdot \underbrace{e^{-4j\pi}}_{=1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 - 4 - 3 - 2\right)$$
$$= -\frac{8}{\sqrt{6}}$$

d) 1) $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$

2) Dann ist $c_5 = c_1^*$ und $c_4 = c_2^*$, so dass man nur c_0, c_1, c_2 und c_3 braucht.

Aufgabe 6 (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Welche Gleichheiten gelten bei den folgenden Binomialkoeffizienten bzw. Fakultäten?

Welcher Ausdruck auf der rechten Seite stimmt mit dem linken Ausdruck übereinstimmt, oder gibt es keinen übereinstimmenden Ausdruck?

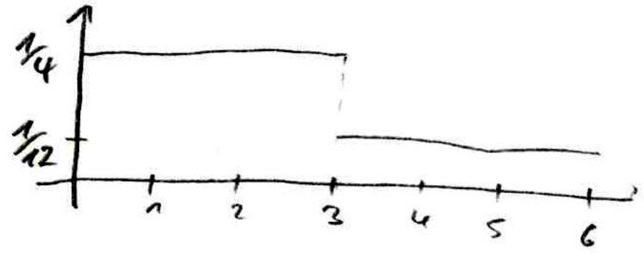
Kreuzen Sie den richtigen Tabelleneintrag (2 Punkte) oder Enthaltung (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

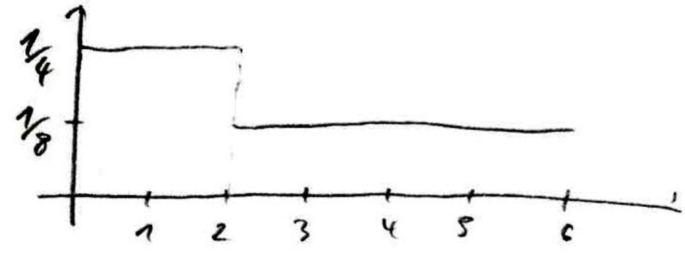
$\binom{1000}{800}+\binom{1000}{801}=$	$\binom{2000}{1601}$	$\binom{1001}{801}$	$\binom{1001}{800}$	keines davon	Enth.
		X			
$\binom{100}{0}+\binom{100}{1}+\ldots+\binom{100}{100}=$	1	$\binom{100}{101}$	2^{100}	keines davon	Enth.
			X		
$\binom{400}{150}=$	$\binom{40}{15}$	$\binom{400}{250}$	$\binom{550}{150}$	keines davon	Enth.
		X			
$\frac{(2n)!}{n!}=$	2	$n!$	$2n$	keines davon	Enth.
				X	
$\frac{(n+1)!}{n!}=$	2	$(1+\frac{1}{n})!$	$n+1$	keines davon	Enth.
			X		

Aufgabe 7

a)



b)



Aufgabe 8

a) Es muss $P(W2 > W1) > 0{,}5$ sein.

Tatsächlich gilt:

$$P(W2 > W1) = P((W2 = 1 \text{ und } W1 = 0) \text{ oder } (W2 = 3 \text{ und } W1 < 3) \text{ oder } (W2 = 5 \text{ und } W1 < 5))$$

$$= P(W2 = 1) \cdot P(W1 = 0) + P(W2 = 3) \cdot P(W1 < 3) + P(W2 = 5) \cdot P(W1 < 5)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1 + 6 + 15}{36} = \frac{22}{36} > \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

b) Ja, wenn man die 6 von Würfel 1 durch eine größere Zahl ersetzt, bleiben die W' von a) gleich, aber der Erwartungswert von Würfel 1 steigt.

Der Erwartungswert von Würfel 2 ist $\frac{22}{6}$.

Bei 0 2 2 4 4 c hat Würfel 1 einen Erwartungswert von $\frac{12 + c}{6}$, d.h. für $c > 10$, z.B. $c = 11$ ist der Erwartungswert größer.

Aufgabe 9

$[1, 5]$ ist für X der $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ - Bereich

$\Rightarrow P(X \in [1; 5]) = 0{,}683$

$$P(Y \in [1; 5]) = \phi\left(\frac{5-2}{4}\right) - \phi\left(\frac{1-2}{4}\right)$$

$$= \phi(0{,}75) - \phi(-0{,}25)$$

$$= \phi(0{,}75) - (1 - \phi(0{,}25))$$

$$\approx 0{,}77337 - (1 - 0{,}59871)$$

$$= 0{,}37208$$