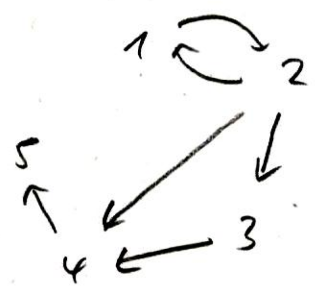
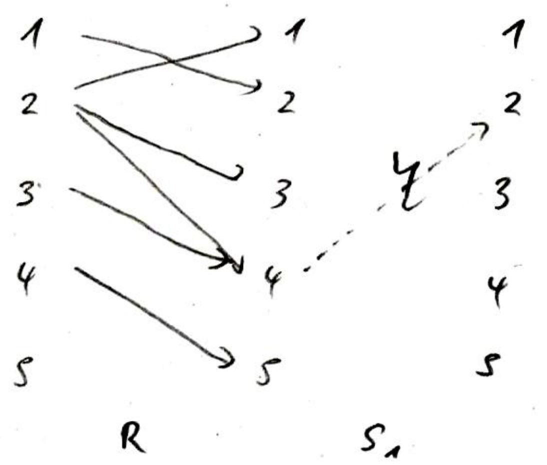
Aufgabe 1



a) Nein, da $(1,2) \in R$ und $(2,1) \in R$, aber $2 \neq 1$

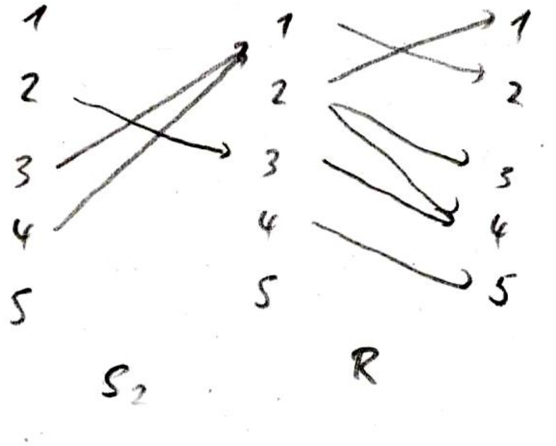
b) $(1,1), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,5), (3,5)$

c) $S_1 \circ R$:



Wegen $(3,2) \in S_1 \circ R$ muss $(4,2) \in S_1$ sein. Dann wäre auch $(2,2) \in S_1 \circ R$ ↯

$R \circ S_2$



Ja, $S_2 = \{(2,3), (3,1), (4,1)\}$

Aufgabe 2

Minimiert werden soll

$$d(m,a) = (g(-1)-2)^2 + (g(0)-1)^2 + (g(3)-0)^2$$

$$(m\cdot(-1)+a-2)^2 + (m\cdot 0+a-1)^2 + (m\cdot 3+a-0)^2$$

$$= (-m+a-2)^2 + (a-1)^2 + (3m+a)^2$$

Kandidaten für Extremstellen sind Nullstellen von grad d:

$$(0,0) = \operatorname{grad} d(m,a)$$

$$= \big(-2(-m+a-2) + 3\cdot 2\cdot(3m+a),$$

$$2(-m+a-2) + 2(a-1) + 2(3m+a)\big)$$

$$= (20m + 4a + 4,\ 4m + 6a - 6)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 5m + a &= -1 \\ 2m + 3a &= 3 \qquad -3\cdot I \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 5m + a &= -1 \\ -13m &= 6 \end{aligned}$$

aus II: $m = -\frac{6}{13}$ in I: $a = -1-5m = -1 + \frac{30}{13} = \frac{17}{13}$

Als einziger Kandidat ist das die gesuchte Minstelle

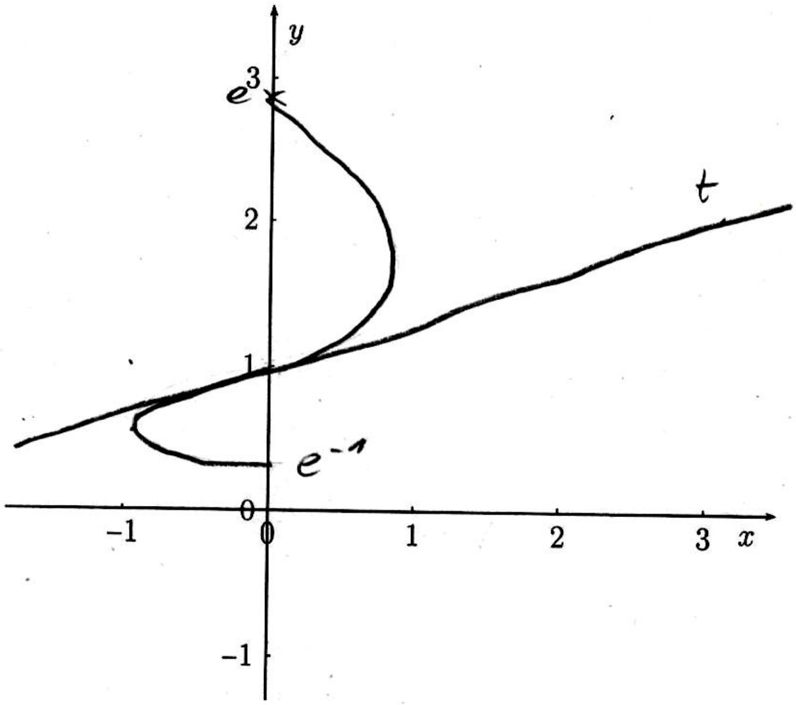
$$\Rightarrow \quad g(x) = -\frac{6}{13}x + \frac{17}{13}$$

Aufgabe 3 (3 + 4 = 7 Punkte)

Sei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad f(t) = \begin{pmatrix}\sin(\pi t)\\ e^t\end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie f für $t \in [-1,1]$ im Koordinatensystem.



b) Geben Sie eine Gleichung für die Tangente an die Kurve für $t = 0$ an, und zeichnen Sie die Tangente in das Koordinatensystem aus a) ein.

$$t(\lambda) = f(0) + \lambda \cdot f'(0) \quad \text{mit } f'(t) = \begin{pmatrix}\pi \cdot \cos(\pi t)\\ e^t\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}\pi\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Sind die Integrale $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ zu den angegebenen Funktionen f und Integrationsbereichen D negativ, gleich Null oder positiv?

(K_R bezeichnet den Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Radius R um den Ursprung.)

Kreuzen Sie die richtige Antwort (2 Punkte) oder „Enthaltung" (E.) (1 Punkt) an!

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

Tipp: Versuchen Sie, sich den Integranden vorzustellen.

$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$		<0	$=0$	>0	E.
$f(x,y) = x^2y$	$D = [0,1] \times [-1,1]$		X		
	$D = [-1,1] \times [0,1]$			X	
	$D = K_1$		X		
f in Polarkoordinaten gegeben durch $f(r) = \sin(r)$	$D = K_\pi$			X	
	$D = K_{2\pi}$	X			
	$D = [0,1] \times [0,1]$			X	

Aufgabe 5

1. Schritt:

Test-Euler: $y_e = y(0) + 1 \cdot \underbrace{y'(0)}_{= 0 - y(0) = -1} = 1 - 1 = 0$

Steigung dort: $y' = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow y'_{mitte} = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$

$\Rightarrow y_1 = y(0) + 1 \cdot y'_{mitte} = 1 + 1 \cdot 0 = 1$

2. Schritt:

Test-Euler: $y_e = y(1) + 1 \cdot \underbrace{y'(1)}_{= 1 - y(1) = 1 - 1 = 0} = 1 + 1 \cdot 0 = 1$

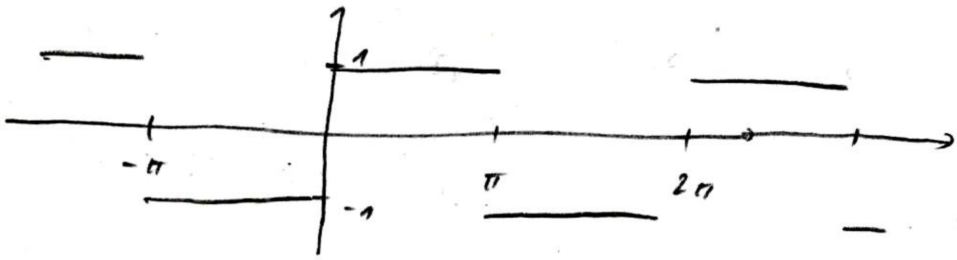
Steigung dort: $y' = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow y'_{mitte} = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_2 = y(1) + 1 \cdot y'_{mitte} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Aufgabe 6

a)



b) f ist ungerade $\Rightarrow$ $a_n = 0$ für alle n.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \sin(nx)}_{\text{gerade}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n}\right) \cdot \cos(nx) \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi \cdot n} \cdot \left(\cos(n \cdot \pi) - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 7

$$W' = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

2 Richtigen auf Tippzettel   3 andere, nicht auf Tippzettel, also 20 andere

$$= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{20}{3}}{\binom{25}{5}}$$

$$= \frac{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}$$

$$= \frac{5^2 \cdot 4^2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} \approx 0{,}21468$$

Aufgabe 8 (2 + 8 + 4 = 14 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Sei

X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 3$ und $\sigma = 2$ und

a) Zeichnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten f_X und f_Y in ein (gemeinsames) Koordinatensystem.

b) Geben Sie in der folgenden Tabelle an, ob der linke Ausdruck <, = oder > dem rechten Ausdruck ist, oder tragen Sie „E“ für Enthaltung ein.

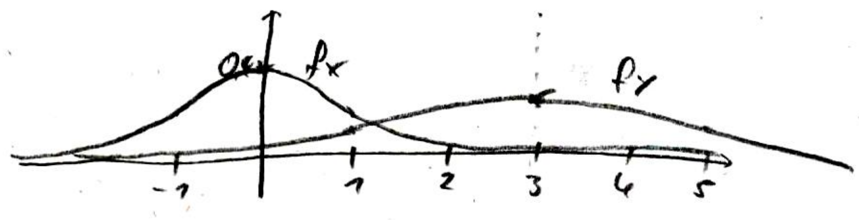
Jeder richtig Eintrag zählt 2 Punkte, eine Enthaltung 1 Punkt; Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	<, =, > oder „E“	
$P(Y \in [2,4])$	>	$P(Y \in [3,5])$
$P(Y \in [1,4])$	=	$P(Y \in [2,5])$
$P(X \in [0,3])$	>	$P(Y \in [0,3])$
$P(X \in [-3,\infty[)$	=	$P(Y \in [-3,\infty[$

c) Geben Sie jeweils ein x_0 und ein y_0 an mit

$$P(X \le x_0) = 0.9 \qquad \text{und} \qquad P(Y \le y_0) = 0.9.$$

a)



c) Aus Tabelle: $x_0 \approx 1{,}28$

$y_0 \approx 3 + 2 \cdot 1{,}28 = 5{,}56$

Aufgabe 9

Fälle: Erste 6

- beim 1. Mal : W: $\frac{1}{6}$, Gewinn 1 €
- beim 2. Mal : W = $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$, Gewinn 2 €
- beim 3. Mal : W = $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$, Gewinn 3 €

„fairer Einsatz" $= E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1€ + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2€ + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3€$

$$= \frac{36 + 60 + 75}{6^3} €$$

$$= \frac{171}{216} € \approx 0{,}8 €$$