Aufgabe 1

Vollständige Induktion

Ind. Anf.: $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k\cdot 2^k = 1\cdot 2^1 = 2 \leq 1\cdot 2^{1+1} = 4 \checkmark$$

Ind. Schritt: $n \rightsquigarrow n+1$

Ind. Voraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k \leq n\cdot 2^{n+1}$

zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^k \leq (n+1)\cdot 2^{n+2}$

Es gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k\right) + (n+1)\cdot 2^{n+1}$

$$\overset{\text{I.V}}{\leq} n\cdot 2^{n+1} + (n+1)\cdot 2^{n+1}$$

$$\overset{n<n+1}{\leq} (n+1)\cdot 2^{n+1} + (n+1)\cdot 2^{n+1}$$

$$= 2\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}$$

$$= (n+1)\cdot 2^{n+2}$$

Aufgabe 2 ($8 + 2 = 10$ Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Auf $\mathbb{R}$ wird die Relation S definiert durch

$$(x, y) \in S \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \leq 1.$$

a) Ist die Relation reflexiv, transitiv, symmetrisch bzw. antisymmetrisch?

Kreuzen Sie die richtige Antwort (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an!

	gilt	gilt nicht	Enth.
S ist reflexiv	X		
S ist transitiv		X	
S ist symmetrisch	X		
S ist antisymmetrisch		X	

b) Für welche y gilt $(1, y) \in S^3$?

Für $y \in [-2; 4]$

Aufgabe 3

Es ist $\text{grad } f(x,y) = \left(1 - e^{x+y^2} ; -1 - 2y e^{x+y^2}\right)$

a) pot. Extremstellen = Nst. von grad f:

$(0,0) = \text{grad } f(x,y)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 1 - e^{x+y^2}$ und $0 = -1 - 2y e^{x+y^2}$

$\Leftrightarrow \quad e^{x+y^2} = 1$ und $2y \cdot e^{x+y^2} = -1$

$\Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$x + y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x + \frac{1}{4} = \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Einzige pot. Extremstelle ist $\left(-\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2}\right)$

b) $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \frac{1}{3} \cdot \text{grad } f(x_0, y_0)$

$= (-1, 1) + \frac{1}{3} (0, -3)$

$= (-1, 0)$

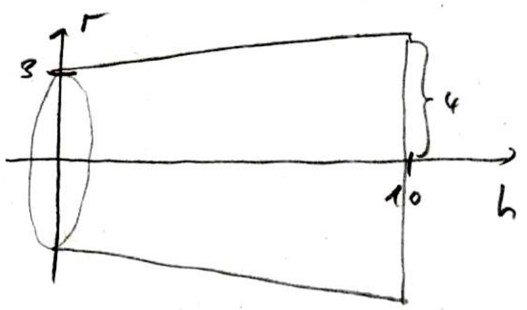
$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + \frac{1}{3} \text{grad } f(x_1, y_1)$

$= (-1, 0) + \frac{1}{3}\left(1 - e^{-1} ; -1\right)$

$= \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-1} ; -\frac{1}{3}\right)$

$\approx (-0{,}79 ; -0{,}33)$

Aufgabe 4



Der Radius in Höhe h ist $r(h) = 3\,cm + \frac{1}{10} h$

Damit ist

$$V = \int_0^{10cm} \pi \cdot \left(3\,cm + \frac{1}{10} h\right)^2 dh$$

$$= \pi \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \left(3\,cm + \frac{1}{10} h\right)^3 \Big|_0^{10cm}$$

$$= \pi \cdot \frac{10}{3} \left((4\,cm)^3 - (3\,cm)^3 \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{10}{3} (64 - 27)\, cm^3$$

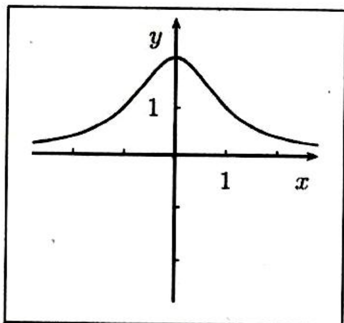
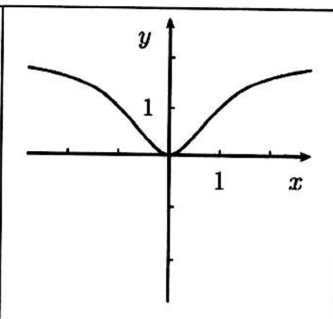
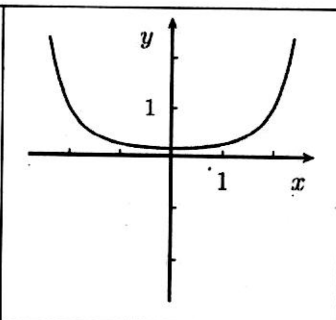
$$= \frac{370 \cdot \pi}{3}\, cm^3$$

$$\approx 387{,}46\, cm^3$$

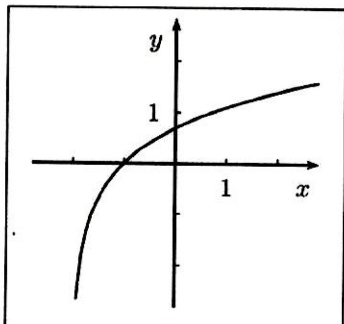
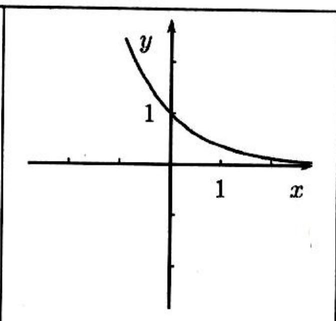
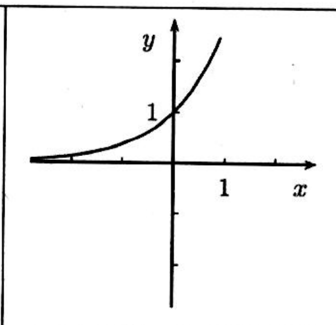
Aufgabe 5 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der abgebildeten Funktionen ist Lösung der entsprechenden Differenzialgleichung? Kreuzen Sie die richtige Antwort (4 Punkte) oder „E." für Enthaltung (2 Punkte) an!

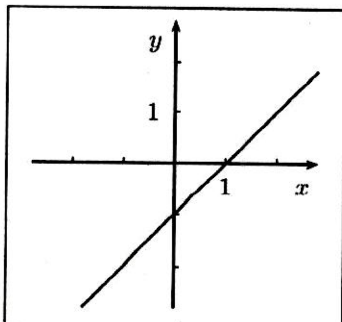
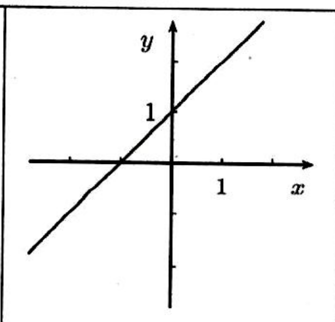
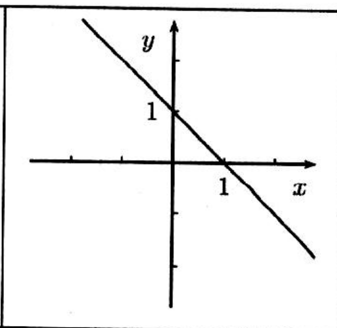
a) $y' = xy$

			E.
		×	

b) $y' = e^{-y}$

			E.
×			

c) $y' = y - x$

			E.
	×		

Aufgabe 6

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = c \cdot \cos(cx+dt) \cdot e^x + \sin(cx+dt) \cdot e^x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = -c^2 \sin(cx+dt) \cdot e^x + c \cdot \cos(cx+dt) e^x$$
$$+ c \cdot \cos(cx+dt) \cdot e^x + \sin(cx+dt) e^x$$
$$= (1-c^2) \sin(cx+dt) e^x + 2c \cos(cx+dt) \cdot e^x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = d \cdot \cos(cx+dt) \cdot e^x$$

Die DGL ist also erfüllt, wenn

$(1-c^2) = 0$ und $2c = d$ ist

$c > 0$

$\Leftrightarrow$ $c = 1$ und $d = 2c$

also für $c = 1$ und $d = 2$.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ die Fourierkoeffizienten zur Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

und f durch ihre Fourierreihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$ dargestellt.

Wie ändern sich die Fourierkoeffizienten, wenn man f wie beschrieben zur Funktion g modifiziert? Tragen Sie in die Tabelle die richtige Nummer der möglichen Modifikationen aus der Liste unten ein.

(Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.)

Modifikation von f	Mod. der Fourier-koeff. entspr. Liste
$g(x) = f(x) + 2$	2
$g(x) = 2 \cdot f(x)$	7
$g(x) = f(-x)$	10
$g(x) = -f(x)$	8
$g(x) = f(x) + 2\cos x$	3

Liste möglicher Modifikationen:

1. a_0 erhöht sich um 2, sonst ändert sich nichts.
2. a_0 erhöht sich um 4, sonst ändert sich nichts.
3. a_1 erhöht sich um 2, sonst ändert sich nichts.
4. a_1 erhöht sich um 4, sonst ändert sich nichts.
5. a_2 erhöht sich um 1, sonst ändert sich nichts.
6. Alle a_k und b_k erhöhen sich um 2.
7. Alle a_k und b_k verdoppeln sich um 2.
8. Alle a_k und b_k wechseln das Vorzeichen.
9. Die a_k wechseln das Vorzeichen, die b_k bleiben gleich.
10. Die b_k wechseln das Vorzeichen, die a_k bleiben gleich.

Aufgabe 8

Mit $w = e^{j \cdot \frac{2\pi}{4}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} j^{-0} & j^{-0} & j^{-0} & j^{-0} \\ j^{-0} & j^{-1} & j^{-2} & j^{-3} \\ j^{-0} & j^{-2} & j^{-4} & j^{-6} \\ j^{-0} & j^{-3} & j^{-6} & j^{-9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 (7 Punkte)

Die folgenden fünf Code-Teile wurden jeweils zwei Mal hintereinander ausgeführt.

Code a):
```
srand(time(NULL));
for (int i = 0; i < 4; i++)
{
    cout << rand() << " ";
}
```

Code b):
```
srand(2025);
for (int i = 0; i < 4; i++)
{
    cout << rand() << " ";
}
```

Code c):
```
for (int i = 0; i < 4; i++)
{
    srand(time(NULL));
    cout << rand() << " ";
}
```

Code d):
```
for (int i = 0; i < 4; i++)
{
    srand(2025);
    cout << rand() << " ";
}
```

Code e):
```
for (int i = 0; i < 4; i++)
{
    srand(2025+i);
    cout << rand() << " ";
}
```

Welche der folgenden Ausgaben gehört zu welchem Codeteil (eine Ausgabe kommt nicht vor)? Tragen Sie in die Tabelle unten die richtige Nummer der Ausgabe ein.

Ausgabe 1:
1. Mal: 6651 6651 6651 6651
2. Mal: 6651 6651 6651 6651

Ausgabe 2:
1. Mal: 6651 15290 20313 4631
2. Mal: 6651 15290 20313 4631

Ausgabe 3:
1. Mal: 6651 6654 6657 6661
2. Mal: 6651 6654 6657 6661

Ausgabe 4:
1. Mal: 6651 15290 20313 4631
2. Mal: 15290 20313 4631 18425

Ausgabe 5:
1. Mal: 16678 16678 16678 16678
2. Mal: 16711 16711 16711 16711

Ausgabe 6:
1. Mal: 17233 22563 28795 3255
2. Mal: 17292 19426 22670 10410

	Code a)	Code b)	Code c)	Code d)	Code e)
Ausgabe	6	2	5	1	3

Aufgabe 10

$$W(\text{Regen in } 8-16 \text{ Uhr})$$

$$= 1 - W(\text{kein Regen in } 8-16 \text{ Uhr})$$

$$= 1 - W(\text{kein Regen in } 8-12 \text{ Uhr und kein Regen in } 12-16 \text{ Uhr})$$

$$= 1 - W(\text{kein Regen in } 8-12 \text{ Uhr}) \cdot W(\text{kein Regen in } 12-16 \text{ Uhr})$$

$$= 1 - (1 - W(\text{Regen in } 8-12 \text{ Uhr})) \cdot (1 - W(\text{Regen in } 12-16 \text{ Uhr}))$$

$$= 1 - (1 - 0{,}4) \cdot (1 - 0{,}7)$$

$$= 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}3$$

$$= 1 - 0{,}18$$

$$= 0{,}82 \mathrel{\hat{=}} 82\%$$

Aufgabe 11

a) Es ist $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

und $\overline{x} = \frac{1}{5}(1+10+3+14+7) = 7$

Setzt man $\overline{x} = E(X)$ erhält man $\frac{1}{\lambda} = 7 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{7}$.

Damit ist

$$P(\text{Erg} > 10) = \int_{10}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_{10}^{\infty} = 0 + e^{-\lambda \cdot 10}$$

$$= e^{-\frac{10}{7}} \approx 0{,}24 \mathrel{\hat{=}} 24\%$$

b) Es ist $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

und $s^2 = \frac{1}{4}\left((1-7)^2 + (10-7)^2 + (3-7)^2 + (14-7)^2 + (7-7)^2\right)$

$$= \frac{1}{4}(36 + 9 + 16 + 49 + 0) = \frac{110}{4} = 27{,}5$$

Setzt man $s^2 = V(X)$ erhält man $\frac{1}{\lambda^2} = 27{,}5$

$\Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{27{,}5}} \approx 0{,}19$