Aufgabe 1

a) 33, 312, 123, 1212

b) 2^n

c) Ind. Anfang: $n=1$: $R_1 = \{3; 12\}$. Dafür gilt die Beh. offensichtlich

Ind. Schritt: $n \to n+1$

Ind. Vor.: $\forall w \in R_n$: Quersumme von w ist durch 3 teilbar.

zu zeigen: $\forall w \in R_{n+1}$: " " " " " " "

Beweis: Ist $w \in R_{n+1}$, so gibt es ein $w_n \in R_n$ mit

$w_n R w$, also

$w = w_n 3$ oder $w = w_n 12$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Quersumme von w_n durch 3 teilbar. Die Quersumme von w ist um 3 höher als die von w_n, also auch durch 3 teilbar.

d) 132

Aufgabe 2 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

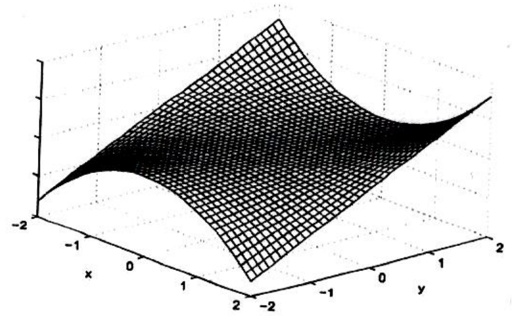
Welche Funktion erzeugt das nebenstehende „Funktionsgebirge"?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

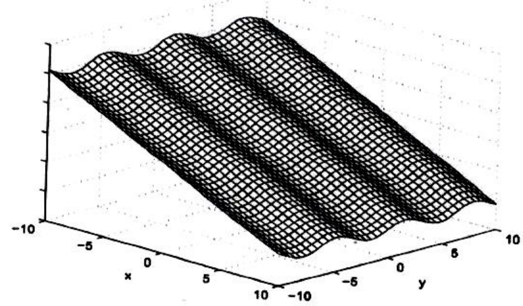
a)

$f(x,y) = x^2 + y$	
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	X
$f(x,y) = x + y^2$	
$f(x,y) = x \cdot y^2$	
Enthaltung	



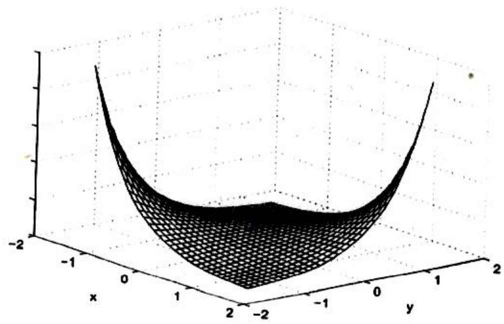
b)

$f(x,y) = \sin(x) - y$	
$f(x,y) = \sin(x - y)$	
$f(x,y) = \sin(y) - x$	X
$f(x,y) = \sin(y - x)$	
Enthaltung	



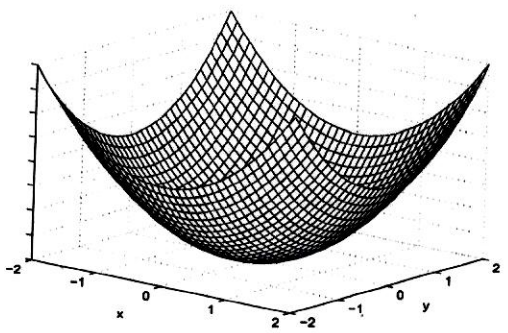
c)

$f(x,y) = e^{xy}$	X
$f(x,y) = e^x \cdot e^y$	
$f(x,y) = e^{x^2y^2}$	
$f(x,y) = e^{x^2} \cdot e^{y^2}$	
Enthaltung	



d)

$f(x,y) = (x+y)^2$	
$f(x,y) = x^2 + y^2$	X
$f(x,y) = x^2 \cdot y^2$	
$f(x,y) = (x+y) \cdot xy$	
Enthaltung	



Aufgabe 3

a) $$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy^2) & -2xy \sin(xy^2) & 1 \\ 2x \cos y & -x^2 \sin(y) & 0 \\ yz^3 & xz^3 & xy \cdot 3z^2 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} \quad \text{m.t}$$

$$J_f(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = -f(x_0, y_0, z_0)$$

also $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta z_0 = -3, \quad 2 \cdot \Delta x_0 = -1, \quad 8 \cdot \Delta y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Integration in Polar-koordinaten: $y = r \cdot \sin\varphi$:

$$\int_D y^2 \, d(x,y)$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi} (r \cdot \sin\varphi)^2 \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} r^3 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$= \frac{1}{8}\pi$$

Aufgabe 5

$y_0 = y$

$y_1 = y'$

$y_2 = y''$

$\Rightarrow \quad y_0' = y_1$

$y_1' = y_2$

$y_2' = y_0 \cdot y_2 - (y_1)^2$

AB: $y_0(0) = 1$

$y_1(0) = -2$

$y_2(0) = 3$

$$y_0(0{,}1) \approx y_0(0) + 0{,}1 \cdot \underbrace{y_0'(0)}_{= y_1(0) = -2} = 1 + 0{,}1 \cdot (-2) = 0{,}8$$

$$y_1(0{,}1) \approx y_1(0) + 0{,}1 \cdot \underbrace{y_1'(0)}_{= y_2(0) = 3} = -2 + 0{,}1 \cdot 3 = -1{,}7$$

$$\Rightarrow y_0(0{,}2) \approx y_0(0{,}1) + 0{,}1 \cdot \underbrace{y_0'(0{,}1)}_{= y_1(0{,}1) \approx -1{,}7} \approx 0{,}8 + 0{,}1 \cdot (-1{,}7) = 0{,}63$$

Aufgabe 6

Es ist mit $x_k = \frac{2\pi \cdot k}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot k$

$$f_k = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(x_k) + b_1 \sin(x_k)$$
$$+ a_2 \cos(2x_k) + b_2 \sin(2x_k) + \frac{1}{2} a_3 \cos(3 \cdot x_k)$$

also

$$f_0 = \frac{1}{2} \cdot 0.8 + (-0.5) \cdot 1 + 0 \cdot 0$$
$$+ 0 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1$$
$$= 0.4 - 0.5 + 0.6$$
$$= 0.5$$

und

$$f_3 = \frac{1}{2} \cdot 0.8 + (-0.5) \cdot \cos(\pi) + 0 \cdot 0$$
$$+ 0 \cdot \cos(2\pi) + 0.6 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot \cos(3\pi)$$
$$= 0.4 + (-0.5) \cdot (-1) + 0.6 \cdot (-1)$$
$$= 0.3$$

Aufgabe 7 (4+4+(4+4+4) = 20 Punkte)

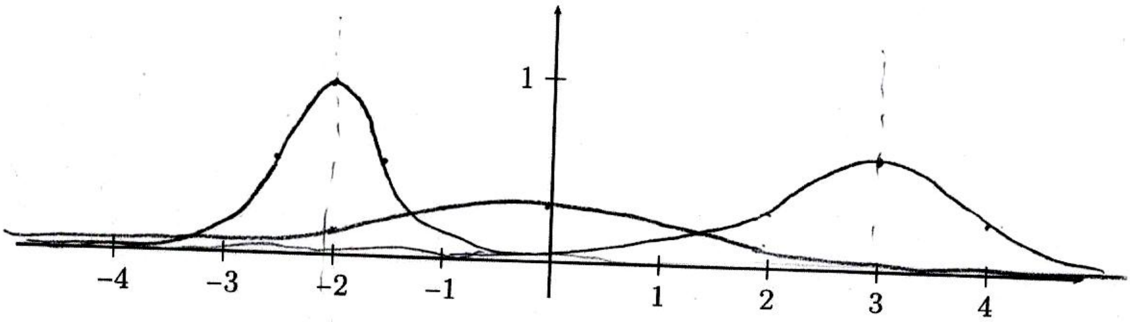
Betrachtet werden die drei Normalverteilungen:

X_1 mit $\mu_1 = 3$ und $\sigma_1 = 1$,

X_2 sei $\mu_2 = -2$ und $\sigma_2 = 0.5$,

X_3 sei $\mu_3 = 0$.

a) Zeichnen Sie die drei Wahrscheinlichkeitsdichten zu X_1, X_2 und X_3 mit $\sigma_3 = 2$ gemeinsam in das folgende Koordinatensystem.



b) Wie groß sind $P(X_1 \in [2,4])$ und $P(X_2 \in [-2,-1])$?
(Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.)

c) Der Wert von σ für X_3 wird so eingestellt, dass $P(X_3 \in [0,1]) = \frac{1}{4}$ ist.

c1) Wie groß ist σ?

c2) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, bei 3 Realisierungen von X_3 mindestens ein Mal einen Wert in $[0,1]$ zu beobachten?

c3) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, bei 8 Realisierungen von X_3 genau drei Mal einen Wert in $[0,1]$ zu beobachten?

Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

b) $P(X_1 \in [2,4]) = 0,683$ $\quad$ $P(X_2 \in [-2;-1]) = \frac{1}{2} \cdot 0.954 = 0,477$

c1) $\frac{1}{4} = \phi\left(\frac{1-0}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{0-0}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 0,5$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0,75$

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} \approx 0,67 \Rightarrow \sigma \approx \frac{1}{0,67} \approx 1,49$

c2) P(mindestens ein Mal Erfolg bei 3 Versuchen)

= 1 − P(3 mal kein Erfolg) = 1 − (P(kein Erfolg))^3

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64} \approx 0.578$

c3) P(genau 3 Erfolge bei 8 Versuchen)

$= \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0,21$