Aufgabe 1.

Ind. Anfang: $n=1$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ ✓

Ind. Schritt: $n \to n+1$

Ind. Vor.: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$

Es gilt: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + (2\cdot(n+1)-1)$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} n^2 + 2n + 2 - 1$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

Aufgabe 2

a) reflexiv:

Es gilt $a \equiv_3 a$ für jedes a, da

$$a = a + \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 3$$

symmetrisch:

Ist $a \equiv_3 b$, so gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k \cdot 3$

$$\Rightarrow \quad b = a - k \cdot 3 = a + \underbrace{(-k)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad a \equiv_3 b$$

transitiv:

Ist $a \equiv_3 b$ und $b \equiv_3 c$, so gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = b + k \cdot 3 \quad \text{und} \quad b = c + l \cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad a = c + l \cdot 3 + k \cdot 3 = c + \underbrace{(k + l)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad a \equiv_3 c$$

b) Es gibt 3 Äquivalenzklassen:

$[0] = \{ \ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots \}$

$[1] = \{ \ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots \}$

$[2] = \{ \ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots \}$

Aufgabe 3 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der Aussagen bzgl. Monotonie der partiellen Funktionen gelten für die angegebenen Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	alle part. Fkt. in x-Richtung sind monoton wachsend			alle part. Fkt. in y-Richtung sind monoton wachsend		
	gilt	gilt nicht	Enth.	gilt	gilt nicht	Enth.
$f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$	X			X		
$f(x, y) = \mathrm{e}^{x \cdot y}$		X			X	
$f(x, y) = x \cdot \mathrm{e}^{y}$	X				X	

Aufgabe 4

a) Es ist $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{1(x+1) - (x+y^2)\cdot 1}{(x+1)^2} , \frac{1}{x+1} \cdot 2y \right)$

$= \left(\frac{1-y^2}{(x+1)^2} , \frac{2y}{x+1} \right)$

$(x_1, y_1) = (0,1) + \frac{1}{2} \operatorname{grad} f(0,1)$

$= (0,1) + \frac{1}{2}(0,2)$

$= (0,2)$

$(x_2, y_2) = (0,2) + \frac{1}{2} \operatorname{grad} f(0,2)$

$= (0,2) + \frac{1}{2}(-3, 4)$

$= (-1.5, 4)$

b) Es ist $f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1$

Mit initialer Schrittweite $\frac{1}{2}$ kommt man wie bei a) zu

$(x_1, y_1) = (0,2)$ mit $f(0,2) = 4 > 1$.

Daher wird die doppelte Schrittweite $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ getestet:

$(x_{test}, y_{test}) = (0,1) + 1 \cdot \operatorname{grad} f(0,1)$

$= (0,1) + 1 \cdot (0,2)$

$= (0,3)$

mit $f(0,3) = 9 > f(0,2)$

Daher wird $(0,3)$ als erster Schritt genommen

(und mit $\lambda = 1$ weiter gemacht)

Aufgabe 5

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} y \cdot \sin(c+xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} y \cdot \sin(c+xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\cos(c+xy)\Big|_{x=0}^{1}\right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\cos(c+y) + \cos(c)\right) dy$$

$$= \left(-\sin(c+y) + \cos(c)\cdot y\right)\Big|_{y=0}^{2}$$

$$= -\sin(c+2) + \cos(c)\cdot 2 + \sin(c)$$

Aufgabe 6 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Zu welcher Differenzialgleichung gehört die nebenstehend gezeichnete Lösungskurve?

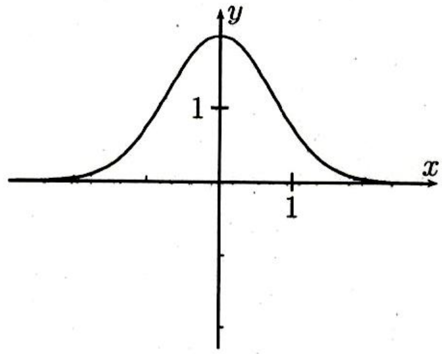
Hinweis: Genau eine Differenzialgleichung ist richtig.

Tipp: Überlegen Sie, welche Differenzialgleichungen Sie ausschließen können, da die Lösung nicht zum Richtungsfeld passt.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (4 Punkte) oder „Enthaltung“ (2 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

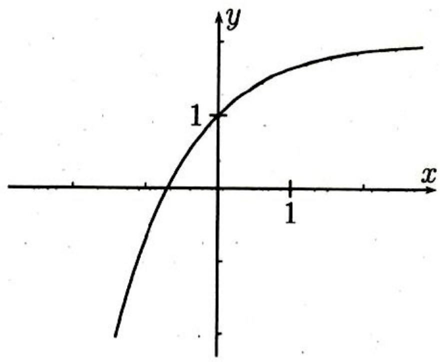
a)

$y' = -2xy$	X
$y' = -2x^2y$	
$y' = -\frac{2x}{y}$	
Enthaltung	



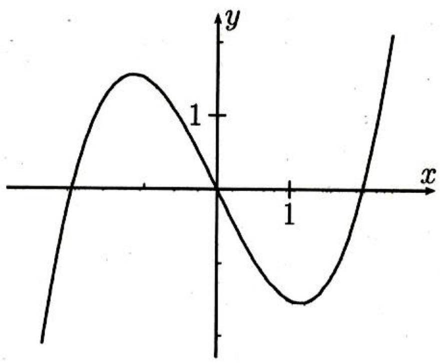
b)

$y' = 2 - y$	X
$y' = 1 - x - y$	
$y' = 2xy$	
Enthaltung	



c)

$y' = \frac{y}{x} + x^2$	X
$y' = -\frac{y}{x} - x^2$	
$y' = -\frac{y}{x} + y^2$	
Enthaltung	



Aufgabe 7

Es ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Für $n > 0$ ist

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n\pi} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot (-\cos(nx)) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{n\pi} \cdot \left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$$

Speziell:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \cdot 1, \quad a_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3\pi} \cdot (-1), \quad a_4 = 0$$

$$b_1 = -\frac{1}{\pi}(0-1) = \frac{1}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{1}{2\pi}(-1-1) = \frac{1}{\pi}$$

$$b_3 = -\frac{1}{3\pi}(0-1) = \frac{1}{3\pi}, \quad b_4 = -\frac{1}{4\pi}(1-1) = 0$$

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe bis $n \leq 4$ ist

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos x + \frac{1}{\pi} \cdot \sin x$$
$$+ \frac{1}{\pi} \cdot \sin(2x)$$
$$+ \frac{-1}{3\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3\pi} \cdot \sin(3x)$$

Aufgabe 8

3 Fünfen auf 7 Plätze

2 Vieren auf verbleibende 4 Plätze

je acht andere Ziffern auf verbleibenden 2 Plätzen

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot \cancel{2\,3}} \cdot \frac{\overset{2}{4} \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 8^2$$

$$= 35 \cdot 6 \cdot 64 = 13440$$

Aufgabe 9

a) $P([0;0{,}1s]) = \int_0^{0{,}1s} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt$

$$= \left[-e^{-\lambda t}\right]\Big|_0^{0{,}1s}$$

$$= -e^{-5s^{-1}\cdot 0{,}1s} + e^0$$

$$= 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}39$$

b) Gesucht: T mit

$$0{,}5 = \int_0^T \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \left(-e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^T = -e^{-\lambda \cdot T} + 1$$

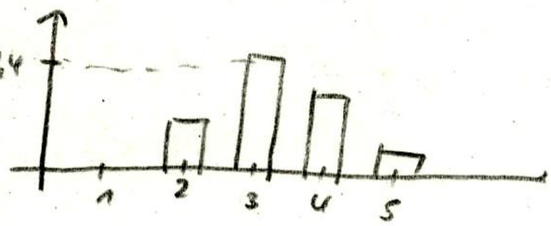
$$\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda \cdot T} = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda T = \ln(0{,}5)$$

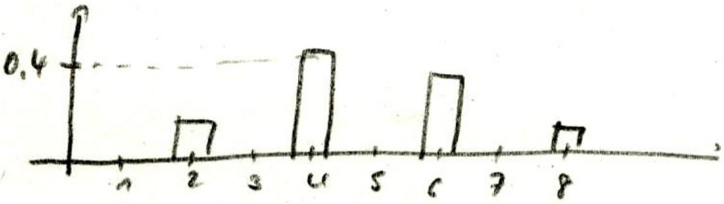
$$\Leftrightarrow \quad T = -\frac{\ln(0{,}5)}{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}5)}{5s^{-1}} \approx 0{,}139$$

Aufgabe 10

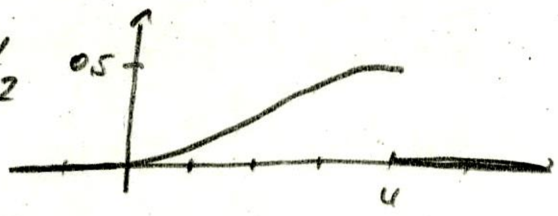
a) Y_1 :



Z_1



b) Y_2



Z_2