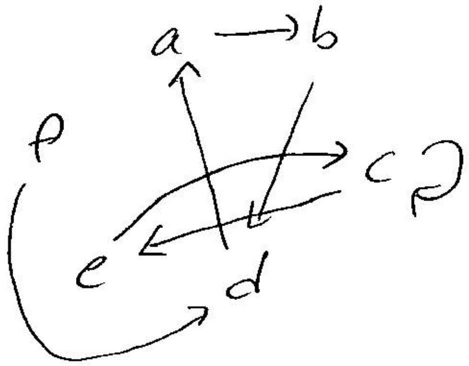
Aufgabe 1



a) a1) $\{(a,a),(b,b),(d,d),(e,e),(f,f)\}$

a2) $\{(a,a),(b,b),(d,d),(e,e)$
$(a,d),(b,a),(d,b),$
$(f,a),(f,b)\}$

a3) $\{(b,a),(d,b),(a,d),(d,f)\}$

b) $R^2 = \{(a,d),(b,a),(d,b),(f,a),$
$(e,c),(e,e),(c,c),(c,e)\}$

$R^{100} = \{(a,b),(b,d),(d,a),(f,d),$
$(e,c),(e,e),(c,c),(c,e)\}$

Aufgabe 2

a) grad $f(x,y,z)$

$$= \left(y^2 e^{-2xz} - 2xy^2 z\, e^{-2xz},\ 2xy\, e^{-2xz},\ -2x^2y^2 e^{-2xz}\right)$$

grad $f(2,1,0) = (1, 4, -8)$

b) Mit $f(2,1,0) = 2$ ist

grad $f(x,y,z)$

$$\approx \left(\frac{f(2{,}1,\ 1,\ 0) - 2}{0{,}1},\ \frac{f(2,\ 1{,}1,\ 0) - 2}{0{,}1},\ \frac{f(2,\ 1,\ 0{,}1) - 2}{0{,}1}\right)$$

$$\approx (\ 1\ ,\ 4{,}2\ ,\ -6{,}59\ )$$

c) $|f(x,y,z) - f(2,1,0)|$

$$\approx \left|\operatorname{grad} f(2,1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= |1\cdot(x-2) + 4\cdot(y-1) - 8\cdot(z-0)|$$

$$\leq 1\cdot\underbrace{|x-2|}_{\leq 0{,}1} + 4\cdot\underbrace{|y-1|}_{\leq 0{,}1} + 8\cdot\underbrace{|z-0|}_{\leq 0{,}1}$$

$$\leq 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1 + 8\cdot 0{,}1$$

$$= 1{,}3$$

Aufgabe 3

In Polar-Koordinaten ist

$$e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2},$$

also

$$\int_{K_R} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, d(x,y) = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_{r=0}^{R} 2\pi \cdot e^{-r^2} \cdot r \, dr$$

$$= -\pi \cdot e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{R}$$

$$= -\pi \cdot e^{-R^2} + \pi$$

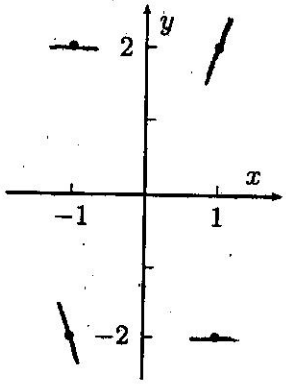
$$= \pi \cdot \left(1 - e^{-R^2}\right)$$

Aufgabe 4 (2 + 4 + 8 = 14 Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' = 4x + 2y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 1$.



a) Skizzieren Sie in der nebenstehenden Skizze die Richtungselemente zur Differenzialgleichung an den vier markierten Punkten.

b) Berechnen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems mit Schrittweite $h = 0.5$.

c) Berechnen Sie zwei Schritte des Heun-Verfahrens zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems mit Schrittweite $h = 0.5$.

b) $y(0{,}5) \approx y(0) + 0.5 \cdot y'(0)$

$= 1 + 0.5 \cdot (4 \cdot 0 + 2 \cdot \underbrace{y(0)}_{1}) = 2$

$y(1) \approx y(0{,}5) + 0.5\, y'(0{,}5)$

$\approx 2 + 0.5 \cdot (4 \cdot 0.5 + 2 \cdot \underbrace{y(0{,}5)}_{\approx 2}) = 5$

c) 1. Schritt: Ableitung bei $(0;1)$: $4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

Test-Euler wie bei b) $\rightarrow$ $y_{Test}(0{,}5) = 2$

Ableitung bei $(0.5; 2)$: $4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2 = 6$

mittlere Ableitung: $\frac{1}{2}(2 + 6) = 4$

$\Rightarrow y_{Heun}(0.5) = 1 + 0.5 \cdot 4 = 3$

2. Schritt: Ableitung bei $(0{,}5; 3)$: $4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 3 = 8$

Test-Euler: $y_{Test}(1) = 3 + 0.5\, y'(0.5)$

$= 3 + 0.5 \cdot (4 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot \underbrace{y(0{,}5)}_{=3}) = 7$

Ableitung bei $(1; 7)$: $4 \cdot 1 + 2 \cdot 7 = 18$

mittlere Ableitung: $\frac{1}{2}(8 + 18) = 13$

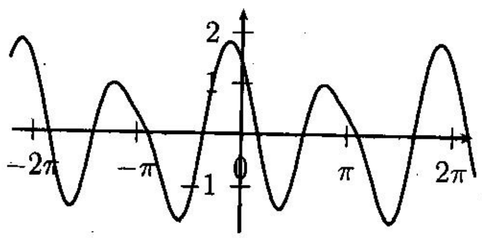
$\Rightarrow y_{Heun}(1) = 3 + 0.5 \cdot 13 = 9{,}5$

Aufgabe 5 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

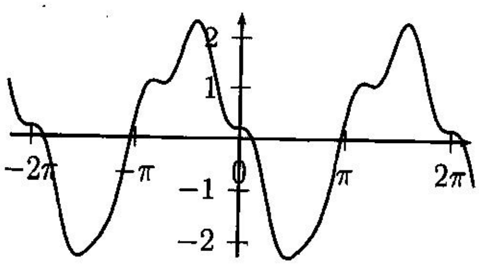
Welche Spalte zeigt die richtigen ersten Fourierkoeffizienten zu der links dargestellten 2π-periodischen Funktion?

Die weiteren Fourierkoeffizienten sind irgendwelche reellen Zahlen.

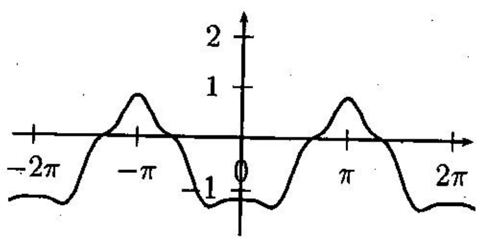
Kreuzen Sie die richtige Spalte (3 Punkte) oder „E." für Enthaltung (1 Punkt) an!



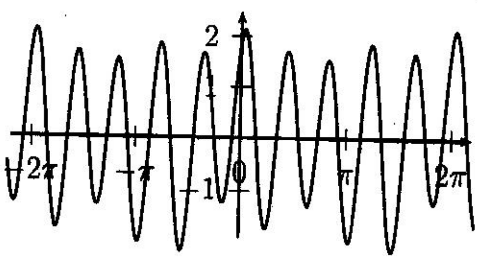
$a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$	E.
		X		



$a_0 = 0$ $a_1 = -2$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = -2$ $b_1 = 0.2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = -2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -2$	E.
		X		



$a_0 = -1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = 1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = -1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$	$a_0 = 1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$	E.
X				



$a_0 = 5$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 5$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = -0.2$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 5$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$	E.
			X	

Aufgabe 6

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(f_0 \cdot 1 + f_1 \cdot \underbrace{e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot 1}{4}}}_{-j} + f_2 \cdot \underbrace{e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot 2}{4}}}_{-1} + f_3 \cdot \underbrace{e^{-j \frac{2\pi \cdot 3}{4}}}_{j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 + (-1) \cdot (-j) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot j \right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} j$$

Da die f_k reell sind, ist

$$c_3 = c_{4-1} = c_1^* = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} j$$

Ferner:

$$c_5 = c_{4+1} = c_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} j$$

Aufgabe 7

a) $P(3:2) = P(3 \text{ Tore für D und 2 Tore für S})$

$= P(3 \text{ Tore für D}) \cdot P(2 \text{ Tore für S})$

$= P(3 \text{ Erfolge bei 6 Versuchen mit Erfolgsw'} p_D)$

$\cdot P(2$ " " " " " $p_S)$

$= \binom{6}{3} \cdot p_D^3 \cdot (1-p_D)^3 \cdot \binom{6}{2} \cdot p_S^2 \cdot (1-p_S)^4$

$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^4$

$= 0{,}0576\ldots$

b) $P(\text{Gewinn zu } 0) = P(\text{Deutschland hat mind. 1 Tor und Spanien kein Tor})$

$= P(\text{D. mind. ein Tor}) \cdot P(\text{Spanien kein Tor})$

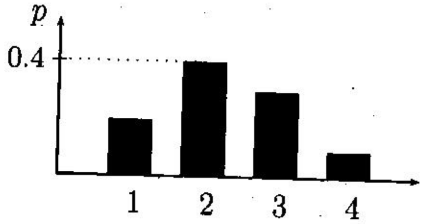
$= (1 - P(\text{D kein Tor})) \cdot P(\text{Spanien kein Tor})$

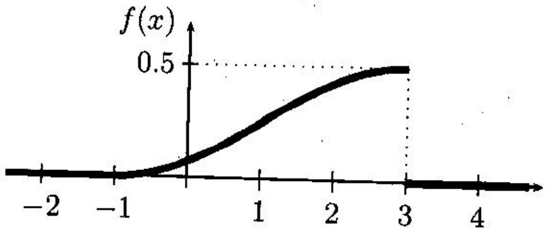
$= (1 - 0{,}7^6) \cdot 0{,}6^6$

$\approx 0{,}041$

Aufgabe 8 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Werten aus $\{1, 2, 3, 4\}$ und Wahrscheinlichkeiten $p(k)$ wie im linken Bild und X_2 eine stetige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x)$ wie im rechten Bild skizziert. Die Dichte f ist nur im Intervall $]-1;3[$ größer als Null.





Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

a) Sind die in der folgenden Tabelle links dargestellten Werte kleiner, gleich oder größer den Werten rechts? Tragen Sie das richtige Zeichen (2 Punkte) oder „E" für „Enthaltung" (1 Punkt) ein.

(Tipp: Beachten Sie bei den letzten beiden Teilen den Unterschied zwischen diskreter und stetiger Zufallsvariable!)

	<, =, > oder „E"	
$P(X_1 < 2.5)$	$>$	0.5
$P(X_2 \leq 1)$	$<$	0.5
$P(X_1 = 2)$	$>$	$P(X_1 = 3)$
$P(X_2 = 1)$	$=$	$P(X_2 = 2)$

b) Markieren Sie den jeweils richtigen (gerundeten) Zahlenwert für die die Erwartungswerte und Standardabweichungen (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt).

$E(X_1)$	
2	
2.3	X
2.5	
3	
Enth.	

$E(X_2)$	
1	
1.81	X
2.57	
3	
Enth.	

Std.abw. von X_1	
−0.2	
0.3	
0.9	X
1.3	
Enth.	

Std.abw. von X_2	
−0.13	
0.23	
0.82	X
1.34	
Enth.	