Aufgabe 1 ($12 + 4 = 16$ Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird die Relation R definiert durch

$$x\,R\,y \quad :\Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = y \quad \text{oder} \quad 3 \cdot x = y.$$

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie den jeweils richtigen Tabelleneintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enth.
R ist reflexiv		X	
R ist transitiv		X	
R ist symmetrisch		X	
R ist antisymmetrisch	X		
$\forall x \in \mathbb{N}:\ x\,R^2\,5x$		X	
$\forall x \in \mathbb{N}:\ x\,R^2\,6x$	X		

b) Geben Sie alle $x \in \mathbb{N}$ an mit $x\,R^+\,120$, wobei R^+ den transitiven Abschluss von R bezeichnet.

60 30 15 5
20 10
40

Aufgabe 2

$$d(a,b) = \left(f(1,0)-2\right)^2 + \left(f(0,3)-1\right)^2 + \left(f(1,2)-0\right)^2$$

$$= (a-2)^2 + (3b-1)^2 + (a+2b)^2$$

Kandidaten für Min-Stelle sind Nst. des Gradienten:

$$(0,0) \overset{!}{=} \operatorname{grad} d(a,b) = \left(2(a-2)+2(a+2b),\ 2\cdot 3\cdot(3b-1)+2\cdot 2(a+2b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2\cdot(2a+2b-2)$$
$$0 = 2\cdot(9b-3+2a+4b)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = a+b-1$$
$$0 = 2a+13b-3 \quad -2\mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad 0 = 11b-1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{11}$$

aus I: $a = 1-b = 1-\frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

Offensichtlich gibt es ein Minstelle ($d(a,b) \to \infty$ für $a,b \to \pm\infty$),

also ist $a = \frac{10}{11}$, $b = \frac{1}{11}$ die gesuchte Minstelle

Aufgabe 3

a) $$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy) \\ y^2 & 2xy \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$f(1{,}9,\,0{,}05) = f(2+(-0{,}1),\ 0+0{,}05)$$

$$\approx f(2,0) + J_f(2,0)\cdot\begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0 \\ -0{,}35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0 \\ 3{,}65 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) $$I = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} (1-r)\cos\varphi \cdot r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{r=0}^{1} (r-r^2)\, dr \cdot \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^1 \cdot 2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2$$

$$= \frac{1}{3}$$

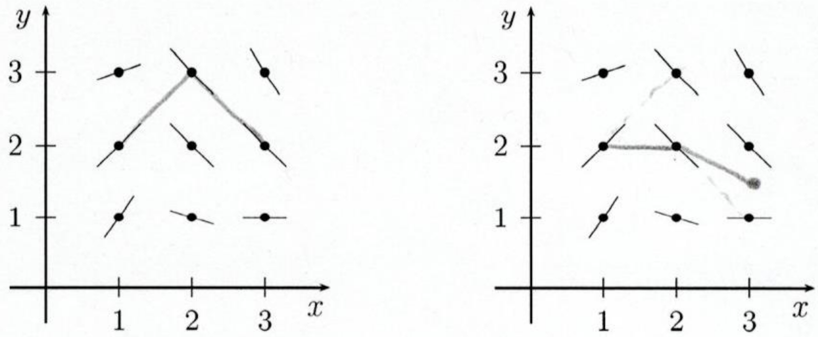
b) $I_1 < I$, da f im linken Halbkreis < 0 ist (wegen $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ und $\cos\varphi < 0$ in diesem Bereich)

$I_2 < I$, da der Def.bereich D_2 eine echte Teilmenge von D ist und $f > 0$ auf $D \setminus D_2$ ist

$I_3 < I$, da $f < 0$ in $D_3 \setminus D$ (wegen $r > 1$ dort, also $1 - r < 0$).

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben ist eine Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ mit einem wie folgt dargestellten Richtungsfeld (es ist zweimal das gleiche Richtungsfeld abgebildet).



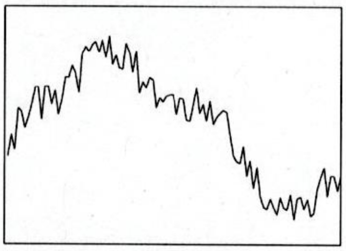
Skizzieren Sie

- in dem linken Richtungsfeld 2 Schritte des Euler-Verfahrens,
- in dem rechten Richtungsfeld 2 Schritte des Heun-Verfahrens,

jeweils zum Startwert $y(1) = 2$ und zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 6 (9 Punkte, davon bis zu 3 Enthaltungspunkte)

Das folgende Bild zeigt den Verlauf einer Datenreihe mit 100 Punkten. Dazu wurden die diskreten (komplexen) Fourierkoeffizienten c_n, $n = 0, \ldots, 99$, berechnet.



Nun werden einige der c_n ausgewählt (die anderen Koeffizienten werden zu 0 gesetzt) und eine Rücktransformation durchgeführt.

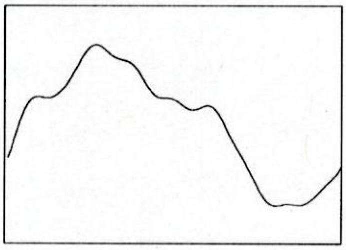
(Genauer: Es wird die Rücktransformation zu $\tilde{c_n}$ mit $\tilde{c_n} = \begin{cases} c_n, & \text{für spezielle } n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ gebildet.)

Bei welchen der folgenden Auswahl-Möglichkeiten ergeben sich die unten abgebildeten Rücktransformationen? Schreiben Sie unter die Bilder die Nummern der richtigen Auswahl (3 Punkte) oder „E" für Enthaltung (1 Punkt).

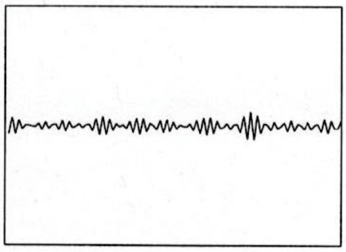
Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

Auswahl-Möglichkeiten:

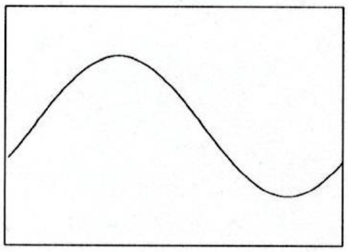
1) nur c_0 wird genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
2) nur c_1 und c_{99} werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
3) nur c_5 und c_{95} werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
4) c_n zu $n \in \{1, \ldots, 10\} \cup \{90, \ldots, 99\}$ werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
5) c_n zu $n \in \{40, \ldots, 60\}$ werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.



Auswahl: 4



Auswahl: 5



Auswahl: 2

Aufgabe 7

a)

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

b) b1) $\sum_{k=0}^{2}\binom{k+3}{k} = \binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2} = \binom{6}{2} = \binom{2+3+1}{2}$

b2) Ind. Anf: $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{k+l}{k} = \binom{l}{0} = 1 = \binom{0+l+1}{0} \checkmark$$

Ind-Schluss:

Ind. Vor: $\sum_{k=0}^{n}\binom{k+l}{k} = \binom{n+l+1}{n}$

zu zeigen: $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k+l}{k} = \binom{n+1+l+1}{n+1}$

Es gilt: $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k+l}{k} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k+l}{k}\right) + \binom{n+1+l}{n+1}$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \binom{n+l+1}{n} + \binom{n+1+l}{n+1}$$

$$= \binom{n+l+2}{n+1} \checkmark$$

Aufgabe 8

a) Schon aus Symmetriegründen sieht man $p_0 = \frac{1}{4}$ 

Formal: Es ist $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x \quad (x \in [0;2])$

also $p_0 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (1 - \frac{1}{2}x)\,dx$

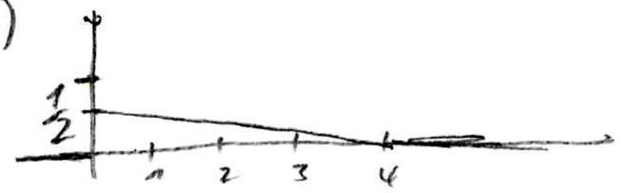
$= (x - \frac{1}{4}x^2)\Big|_1^2 = (2-1) - (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}.$

b) W'(mindestens eine > 1)

$= 1 -$ W'(beide < 1)

$= 1 - (1-p_0)^2$

$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

c) 

Aufgabe 9

a) $\overline{x} = \frac{1}{5}(23s + 42s + 15s + 7s + 18s) = 21s$

$$s^2 = \frac{1}{4}\left((23s-21s)^2 + (42s-21s)^2 + \ldots + (18s-21s)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4 + 21^2 + 36 + 14^2 + 9\right)s^2$$

$$= 171.5\, s^2$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} \approx 13{,}1$$

b) Es ist $\overline{x} \approx E(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$

also $\lambda \approx \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{21s} \approx 0{,}0476\, s^{-1}$