Aufgabe 1 (4 + 12 = 16 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$ und Σ^* alle aus diesen Buchstaben bildbaren Wörter inklusive dem leeren Wort „". Auf Σ^* sei durch die folgende Angabe eine Relation R definiert:

$w \in \Sigma^*$ steht in Relation zu aw, wb und cwc.

a) Geben Sie alle $w \in \Sigma^*$ mit „b"$R^2 w$.

b) Gilt

„"$R^+ w$

für die in der folgenden Tabelle angegebenen Wörter w? Kreuzen Sie den richtigen Eintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enth.
aacccc	X		
aaaccc		X	
aabbcc		X	
aaccbb	X		
acabcb	X		
acbccc		X	

a) aab
bbb
ccbcc
abb
cabc
cbbc
acbc
cbcb

Aufgabe 2

			E.
Die Stelle $(x, y) = (-0.5, -0.5)$ ist	Minimalstelle		
	Maximalstelle		
	Sattelstelle	X	
Die Stelle $(x, y) = (0.5, 0.5)$ ist	Minimalstelle	X	
	Maximalstelle		
	Sattelstelle		
Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt	$f(x, y) = f(y, x)$	X	
	$f(x, y) = f(x, -y)$		
	$f(x, y) = f(-x, -y)$		
$\operatorname{grad} f(1, -1) \approx$	$(-1.64, 5.08)$		
	$(1.64, -5.08)$	X	
	$(5.08, -1.64)$		
$\operatorname{grad} f(1.5, 0.5) \approx$	$(2.55, -0.81)$	X	
	$(-0.81, 2.55)$		
	$(0.13, 0.13)$		
$\frac{\partial}{\partial x} f(-1, 1) \approx$	-5.0	X	
	0.0		
	5.0		
$\frac{\partial}{\partial y} f(1, -0.5) \approx$	-3.9	X	
	1.5		
	2.8		
$\int_{[-2,2]\times[-2,2]} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)$	< 0		
	$= 0$		
	> 0	X	

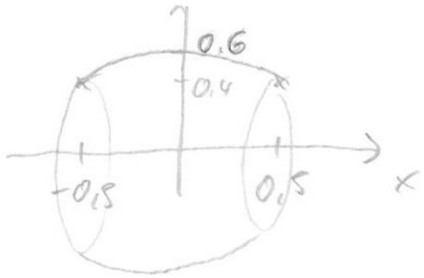
Aufgabe 3

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (4x-4+y,\ x+z,\ y)$

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$$
$$= (-1, 2, 1) - \frac{1}{2} \cdot (-6, 0, 2)$$
$$= (-1, 2, 1) - (-3, 0, 1)$$
$$= (2, 2, 0)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2} \operatorname{grad} f(x_1, y_1, z_1)$$
$$= (2, 2, 0) - \frac{1}{2}(6, 2, 2)$$
$$= (2, 2, 0) - (3, 1, 1)$$
$$= (-1, 1, -1)$$

Aufgabe 4



Die Parabel wie skizziert wird beschrieben durch

$f(x) = cx^2 + 0{,}6$

mit $0{,}4 = f(0{,}5) = c \cdot 0{,}25 + 0{,}6$

$\Leftrightarrow \; -0{,}2 = c \cdot 0{,}25$

$\Leftrightarrow \; c = -0{,}8$

also $f(x) = -0.8\,x^2 + 0{,}5$

Als Rotationskörper hat das Fass damit das Volumen

$$V = \int_{-0.5}^{0.5} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx = \int_{-0,5}^{0,5} \pi \cdot (-0{,}8x^2 + 0{,}6)^2 \, dx$$

$$\overset{\text{Sym.}}{=} 2 \cdot \pi \int_0^{0,5} \left(0{,}64x^4 - 0{,}96x^2 + 0{,}36\right) dx$$

$$= 2 \cdot \pi \left(\frac{0{,}64}{5} x^5 - \frac{0{,}96}{3} x^3 + 0{,}36 \cdot x \right) \Big|_0^{0,5}$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{0{,}02}{5} - \frac{0{,}12}{3} + 0{,}18 \right)$$

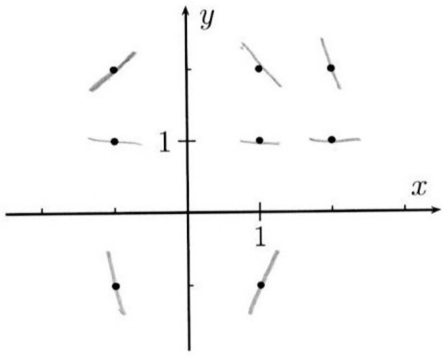
$$= 0{,}288 \cdot \pi \approx 0{,}9048$$

Aufgabe 5 (4 + 6 = 10 Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' = x \cdot (1 - y).$$

a) Zeichnen Sie in das Diagramm an den markierten acht Punkten die Richtungselemente für das Richtungsfeld der Differenzialgleichung.



b) Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = 0$ zu der Differenzialgleichung, Schrittweite 0.5, aus.

$$y(1{,}5) \approx y(1) + 0{,}5 \cdot y'(1)$$

$$= 0 + 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$$

$$y(2) \approx y(1{,}5) + 0{,}5 \cdot y'(1{,}5)$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot (1 - 1{,}5))$$

$$= 0{,}875$$

Aufgabe 6

Es ist $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = 2\cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$
$+\lambda \cdot \sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) = -4\sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$
$$+2\lambda\cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$
$$+\lambda\cdot 2\cdot\cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$
$$+\lambda^2\sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$
$$=(\lambda^2-4)\sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$
$$+4\lambda\cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$

und $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = c\cdot\cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$

Um die DGL zu erfüllen, muss also $\lambda^2-4=0$ und $c=4\lambda$

sein, also $\lambda=2$ und $c=8$

Aufgabe 7

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{k=0}^{3} f_k \cdot \underbrace{e^0}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 2 + 0 + 1) = 2$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{k=0}^{3} f_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot k}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \left(f_0 \cdot e^{-j \cdot 0} + f_1 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} + f_2 \cdot e^{-j \cdot \pi} + f_3 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi \cdot 3}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot (-j) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot j)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j$$

Aufgabe 8

W'(mind. 3 Erdbeerbonbons)

= 1 - W'(höchstens 2 Erdbeerbonbons)

= 1 - (W'(kein E.-Bon.) + W'(genau ein E.-Bon.)

+ W'(genau 2 E.-Bon.))

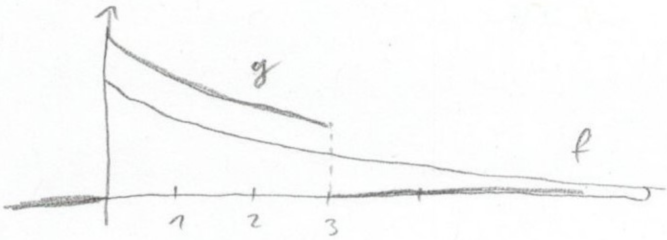
$= 1 - \left(0{,}6^{10} + 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^{9} + \binom{10}{2} 0{,}4^{2} \cdot 0{,}6^{8}\right)$

$= 1 - 0{,}6^{8}\left(0{,}6^{2} + 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 0{,}4^{2}\right)$

$\approx 0{,}8327$

Aufgabe 9

a)



b) Die Gesamtfläche muss gleich 1 sein, also

$$1 = \int_0^3 c\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx = -c\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^3 = c\cdot\left(-e^{-3\lambda}+1\right)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{1-e^{-3\lambda}}$$

c1) $$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot g(x)\,dx = \int_0^3 x\cdot c\cdot \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\,dx$$

$$= \frac{c}{3}\cdot\int_0^3 x\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\,dx$$

$$= \frac{c}{3}\left[x\cdot\left(-3e^{-\frac{1}{3}x}\right)\Big|_0^3 - \int_0^3 1\cdot\left(-3\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\right)dx\right]$$

$$= \frac{c}{3}\left[-9\cdot e^{-1} - 0 + 3\cdot(-3)\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_0^3\right]$$

$$= \frac{e}{e-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[-9\cdot e^{-1} - 9\cdot e^{-1} + 9\right]$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{e}{e-1}\left(9-18e^{-1}\right)$$

$$= \frac{3e-6}{e-1} \approx 1{,}254$$

c2) 0,845 ist richtig