

Aufgabe 1

Ind. Auf: $n=0$: $a_0 = 3 \cdot 4^0 + 1 = 3 + 1 = 4 \quad \checkmark$

Ind. Schritt: $n \rightsquigarrow n+1$

Ind. Vor: $a_n = 3 \cdot 4^n + 1$

zu zeigen: $a_{n+1} = 3 \cdot 4^{n+1} + 1$

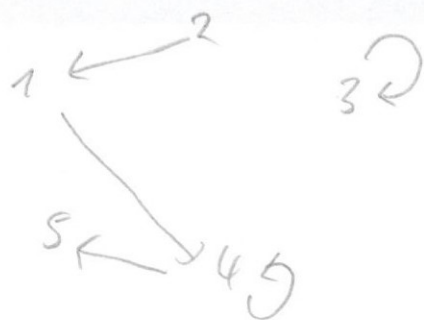
ES gilt $a_{n+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} 4 \cdot a_n - 3$

$$\stackrel{\text{I.V.}}{=} 4 \cdot (3 \cdot 4^n + 1) - 3$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 4^n + 4 - 3$$

$$= 3 \cdot 4^{n+1} + 1$$

Aufgabe 2



a) $(2,4)$, $(2,5)$ und $(1,5)$

b) $(1,1)$, $(2,2)$ und $(5,5)$

c) z.B. $S = \{(1,2)\} \cup R$

Dann gilt $1S4$ aber nicht $4S1$
 \Rightarrow nicht symmetrisch

Ferner $1S2$ und $2S1$, aber $1 \neq 2$
 \Rightarrow nicht antisym.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

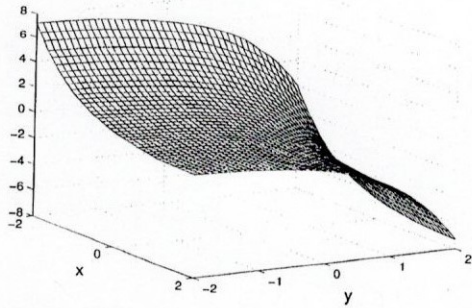
Die in den Bildern dargestellten Funktionen haben jeweils die Funktionsvorschrift

$$f(x, y) = a \cdot e^{bx} + c \cdot e^{dy}$$

mit speziellen $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}$.

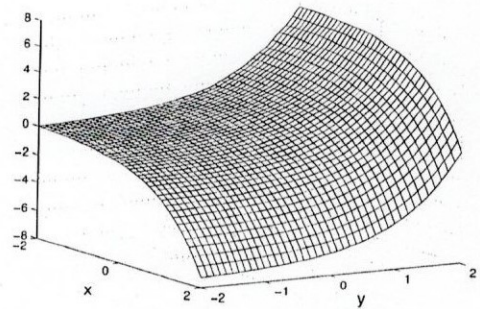
Geben Sie die konkreten Funktionsvorschriften zu den Bildern an.

a)



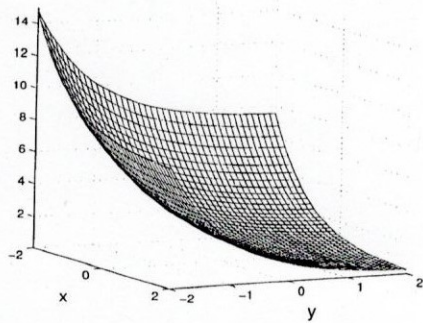
$$f(x, y) = e^{-x} - e^y$$

b)



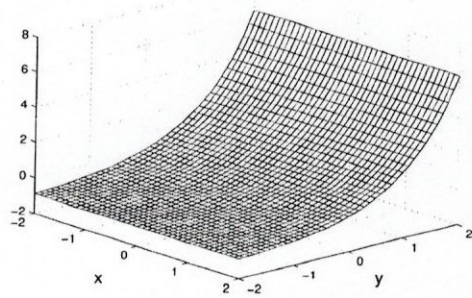
$$f(x, y) = -e^x + e^y$$

c)



$$f(x, y) = e^{-x} + e^{-y}$$

d)



$$f(x, y) = -1 + e^y$$

Aufgabe 4

a) Es ist $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ 6x^2 & 2y \end{pmatrix}$

1. Schritt:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \left(J_f(1,2) \right)^{-1} \cdot (-f(1,2)) = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \left(J_f(1,1) \right)^{-1} \cdot (-f(1,1)) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

b) $J_f(1,2) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{0,1} (1,1^3 \cdot 2^2 - 1^2 \cdot 2^2) & \frac{1}{0,1} (1^3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 1^3 \cdot 2^2) \\ \frac{1}{0,1} (2 \cdot 1,1^3 + 2^2 \cdot 2 - (2 \cdot 1^3 + 2^2 \cdot 2)) & \frac{1}{0,1} (2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 - (2 \cdot 1^3 + 2^2 \cdot 2)) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 13,24 & 4,1 \\ 6,62 & 4,1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

$$\int_D x^2 z e^{xy^2} d(x,y,z) = \int_{x=0}^3 \int_{z=0}^2 \int_{y=0}^1 x^2 z e^{xy^2} dy dz dx$$

$$= \int_{x=0}^3 \int_{z=0}^2 x e^{xy^2} \Big|_{y=0}^1 dz dx$$

$$= \int_{x=0}^3 \int_{z=0}^2 (x \cdot e^{xz} - x) dz dx$$

$$= \int_{x=0}^3 (e^{xz} - xz) \Big|_{z=0}^2 dx$$

$$= \int_{x=0}^3 (e^{2x} - 2x - 1) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{2x} - x^2 - x \right) \Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{2} e^6 - 9 - 3 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} e^6 - \frac{25}{2}$$

$$\approx 189,21$$

Aufgabe 6 (8 + 4 = 12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Die beiden Funktionen $u(t)$ und $v(t)$, die die Populationsgröße bestimmter Spezies U bzw. V angeben, erfüllen das Differenzialgleichungssystem

$$u' = 5 - v$$

$$v' = u \cdot v.$$

(Dabei wird davon ausgegangen, dass $u(t) \geq 0$ und $v(t) \geq 0$ ist.)

- a) Kreuzen Sie die richtigen Zusammenhänge (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) in der folgenden Tabelle an.

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

U vermehrt sich mehr,	je größer U ist.		U vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	✓
	unabh. von U .	✓		unabh. von V .	
	Enthaltung			Enthaltung	
V vermehrt sich mehr,	je größer U ist.	✓	V vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	✓
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	
	unabh. von U .			unabh. von V .	
	Enthaltung			Enthaltung	

- b) Führen Sie zu der Anfangssituation $u(0) = 2$ und $v(0) = 3$ einen Schritt des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.1$ durch.

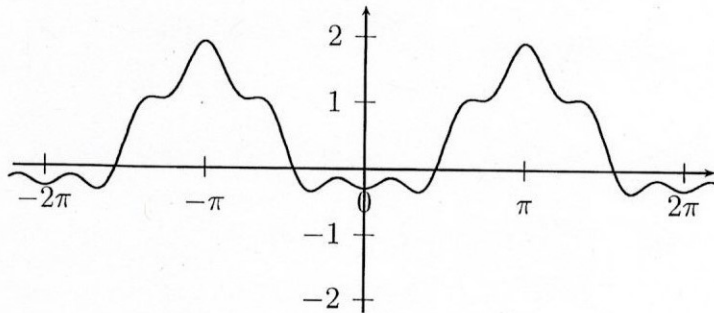
$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u(0,1) \\ v(0,1) \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} u(0) + u'(0) \cdot 0,1 \\ v(0) + v'(0) \cdot 0,1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u(0) + (5 - v(0)) \cdot 0,1 \\ v(0) + u(0) \cdot v(0) \cdot 0,1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 + (5 - 3) \cdot 0,1 \\ 3 + 2 \cdot 3 \cdot 0,1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2,2 \\ 3,6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

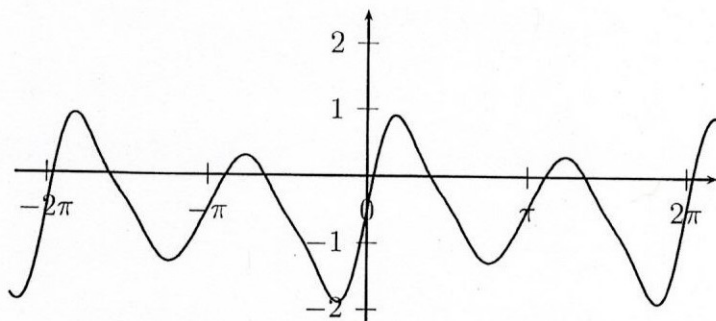
Für die Fourierkoeffizienten der dargestellten 2π -periodischen Funktionen gilt

- $a_0 \in \{-1, 0, 1\}$,
- einer der Fourierkoeffizienten a_1, b_1, a_2, b_2 ist gleich $+1$ oder -1 , die anderen drei sind gleich Null,
- die weiteren Koeffizienten sind irgendwelche betragsmäßig kleine reelle Zahlen.

Geben Sie die richtigen Werte für a_0, a_1, b_1, a_2 und b_2 an.



$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -1 \\ b_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ b_2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 8

$$a) 1) \left(\frac{18}{20}\right)^5 \cdot \frac{2}{20} = 0,9^5 \cdot 0,1 = 0,059$$

$$2) \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{14}{16} \cdot \frac{2}{15} = \frac{14 \cdot 2}{20 \cdot 19} \approx 0,074$$

$$b) 1) \left(\frac{n-2}{n}\right)^{r-1} \cdot \frac{2}{n}$$

$$2) \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdot \frac{\cancel{n-4}}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-r+2-2}{\cancel{n-r+2}} \cdot \frac{2}{n-r+1}$$
$$= \frac{(n-r) \cdot 2}{n \cdot (n-1)}$$

Aufgabe 9 (2 + 6 + 4 = 12 Punkte, davon bis zu 3 Enthaltungspunkte)

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu = 2$ und $\sigma = 0.5$.

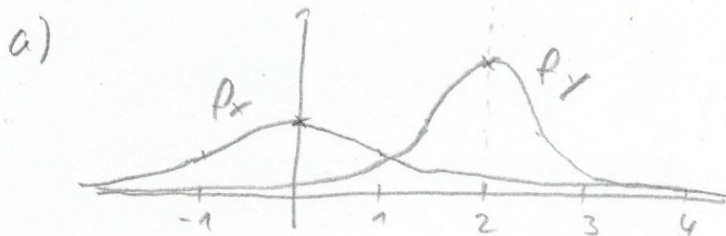
- a) Zeichnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten f_X und f_Y in ein (gemeinsames) Koordinatensystem.
- b) Geben Sie in der folgenden Tabelle an, ob der linke Ausdruck $<$, $=$ oder $>$ dem rechten Ausdruck ist, oder tragen Sie „E“ für Enthaltung ein.

Jeder richtig Eintrag zählt 1 Punkt, eine Enthaltung 0.5 Punkte; Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	$<$, $=$, $>$ oder „E“	
$P(X \in [-1, 1])$	$>$	$P(X \in [0, 2])$
$P(Y \in [-1, 1])$	$<$	$P(Y \in [0, 2])$
$P(X \in [1, 2])$	$<$	$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [0, 1])$	$<$	$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [0, 2])$	$=$	$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [2, \infty[)$	$=$	$P(Y \in] - \infty, 1]$

- c) Geben Sie jeweils ein x_0 und ein y_0 an mit

$$P(X \leq x_0) = 0.8 \quad \text{und} \quad P(Y \leq y_0) = 0.8.$$



c) $x_0 = \Phi(0.8) \approx 0.84$

$$y_0 = 2 + 0.5 \cdot 0.84 = 2.42$$