

Aufgabe 7

$$\text{Ind. Auf. : } n=0 : f^{(0)}(x) = f(x) = e^{2x} = 2^0 \cdot e^{2x} \quad \checkmark$$

Ind. Schritt : $n \rightsquigarrow n+1$

$$\text{Ind. Vor. : } f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$$

$$\text{zu zeigen: } f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1} \cdot e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\ &\stackrel{\text{l.v.}}{=} (2^n \cdot e^{2x})' \\ &= 2^n \cdot 2 \cdot e^{2x} \\ &= 2^{n+1} \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Sei M die Menge aller deutschen Orte. Auf M werden folgende Relationen betrachtet ($s, t \in M$)

$R: s R t :\Leftrightarrow s$ und t haben einen Abstand kleiner 100km,

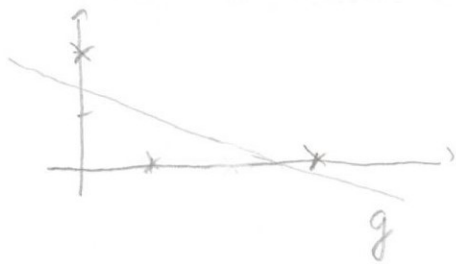
$S: s S t :\Leftrightarrow s$ hat weniger Einwohner als t .

Welche Eigenschaften besitzen diese Relationen? Kreuzen Sie den jeweils richtigen Tabelleneintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.

	für R			für S		
	gilt	gilt nicht	Enth.	gilt	gilt nicht	Enth.
reflexiv	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
transitiv	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
symmetrisch	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
antisymmetrisch	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 3



$$\begin{aligned}
 d(a, m) &= (g(0) - 2)^2 + (g(1) - 0)^2 + (g(3) - 0)^2 \\
 &= (a - 2)^2 + (m + a)^2 + (3m + a)^2 \\
 &= \underline{a^2 - 4a + 4} + \underline{m^2 + 2am + a^2} + \underline{9m^2 + 6am + a^2} \\
 &= 3a^2 - 4a + 4 + 10m^2 + 8am
 \end{aligned}$$

Kandidaten für Minimalstelle:

$$(0, 0) \stackrel{!}{=} \text{grad } d(a, m)$$

$$= (6a - 4 + 8m, 20m + 8a)$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \quad & 6a + 8m = 4 & \Leftrightarrow \quad & 3a + 4m = 2 \\
 \Leftrightarrow \quad & 8a + 20m = 0 & \Leftrightarrow \quad & a = -\frac{20}{8}m = -\frac{5}{2}m
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}m \text{ und } \underbrace{3 \cdot \left(-\frac{5}{2}m\right) + 4m = 2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2}m = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{10}{7} \text{ und } m = -\frac{4}{7}$$

Als einziger Kandidat ist dies die Minstelle

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{10}{7}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} a) f(r, \varphi) &= (r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot (r \sin \varphi) \\ &= r^3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi} f(r, \varphi) \cdot r \, d\varphi \, dr \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi} r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cdot r \, d\varphi \, dr \\ &= \int_{r=0}^1 r^4 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3} (-1)^3 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

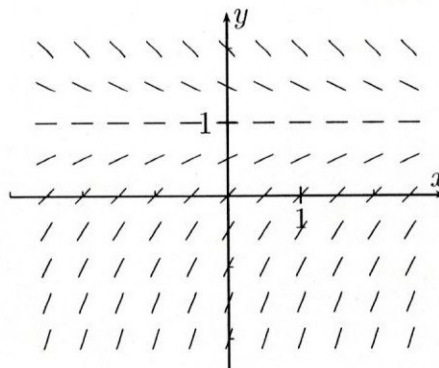
Aufgabe 5 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Zu welcher Differenzialgleichung gehört das nebenstehende Richtungsfeld?

Kreuzen Sie die richtige Antwort (4 Punkte) oder „Enthaltung“ (2 Punkte) an.

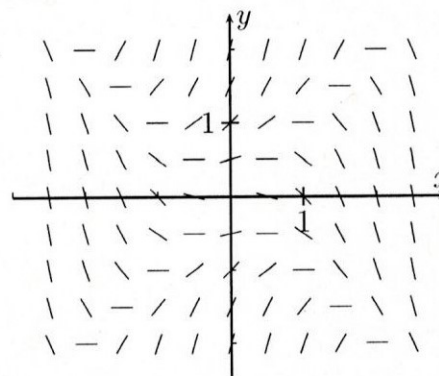
a)

$y' = 1 - x$	<input type="checkbox"/>
$y' = 1 - y$	<input checked="" type="checkbox"/>
$y' = 1 - x^2$	<input type="checkbox"/>
$y' = 1 - y^2$	<input type="checkbox"/>
Enthaltung	<input type="checkbox"/>



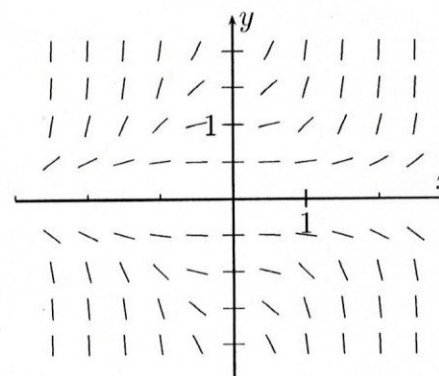
b)

$y' = x - y$	<input type="checkbox"/>
$y' = y - x$	<input type="checkbox"/>
$y' = x^2 - y^2$	<input type="checkbox"/>
$y' = y^2 - x^2$	<input checked="" type="checkbox"/>
Enthaltung	<input type="checkbox"/>



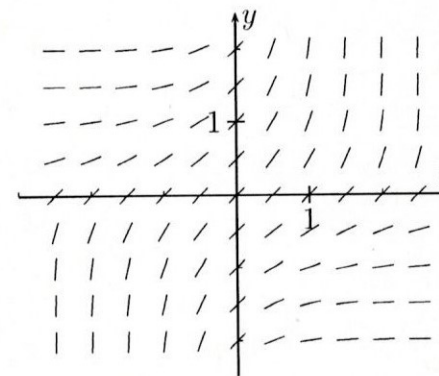
c)

$y' = x^2 \cdot y^2$	<input type="checkbox"/>
$y' = x^2 \cdot y^3$	<input checked="" type="checkbox"/>
$y' = x^3 \cdot y^2$	<input type="checkbox"/>
$y' = x^3 \cdot y^3$	<input type="checkbox"/>
Enthaltung	<input type="checkbox"/>



d)

$y' = e^{x+y}$	<input type="checkbox"/>
$y' = e^{xy}$	<input checked="" type="checkbox"/>
$y' = \frac{1}{e^{x+y}}$	<input type="checkbox"/>
$y' = \frac{1}{e^{xy}}$	<input type="checkbox"/>
Enthaltung	<input type="checkbox"/>



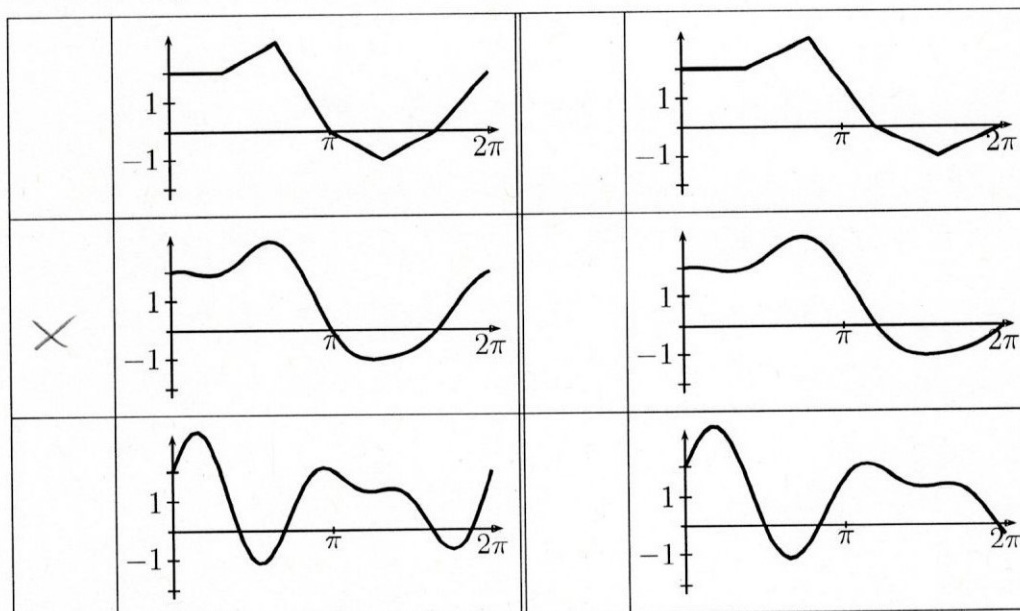
Aufgabe 6 (6 + 2 + 3 + 2 = 13 Punkte)

Zu den sechs Datenpunkten

$$f_0 = 2, \quad f_1 = 2, \quad f_2 = 3, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = -1 \quad \text{und} \quad f_5 = 0$$

wird die reelle diskrete Fourier-Transformation betrachtet.

- Berechnen Sie konkret die Koeffizienten a_0 und a_1 .
- Welche Koeffizienten braucht man noch, um daraus die Datenpunkte wieder zurückzurechnen?
(Sie brauchen diese Werte nicht zu berechnen!)
- Welche Datenpunkte $\tilde{f}_i, i = 0, \dots, 5$, erhält man, wenn man bei der Rücktransformation versehentlich $a_0 = 0$ setzt?
- Aus den Koeffizienten wird in üblicher Weise eine Interpolationsfunktion gebildet. Kreuzen Sie an, welches Bild die richtige Interpolationsfunktion zeigt?



$$a) \quad a_0 = \frac{2}{6} (2 + 2 + 3 + 0 + (-1) + 0) = 2$$

$$a_1 = \frac{2}{6} (2 \cdot \cos(0) + 2 \cdot \cos(2 \cdot \frac{\pi}{6}) + 3 \cdot \cos(\frac{4\pi}{6}) + 0 \dots + (-1) \cdot \cos(\frac{8\pi}{6}) + 0 \dots)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + (-1) \cdot (-\frac{1}{2})) = \frac{2}{3}$$

$$b) \quad a_2, a_3, b_1, b_2$$

c) jeweils um 1 erniedrigte Werte, also

$$\tilde{f}_0 = 1, \quad \tilde{f}_1 = 1, \quad \tilde{f}_2 = 2, \quad \tilde{f}_3 = -1, \quad \tilde{f}_4 = -2, \quad \tilde{f}_5 = -1$$

Aufgabe 7

$$\frac{\binom{160}{60}}{\binom{161}{100}} = \frac{\frac{160!}{60! \cdot 100!}}{\frac{161!}{100! \cdot 61!}}$$
$$= \frac{160! \cdot 100! \cdot 61!}{161! \cdot 100! \cdot 60!}$$
$$= \frac{61}{161}$$

Aufgabe 8

$$P(W_1 > W_2)$$

$$= P(W_1 = 2 \text{ und } W_2 = 1)$$

$$+ P(W_1 = 4 \text{ und } (W_2 = 1 \text{ oder } W_2 = 3))$$

$$+ P(W_1 = 6)$$

$$= P(W_1 = 2) \cdot P(W_2 = 1)$$

$$+ P(W_1 = 4) \cdot (P(W_2 = 1) + P(W_2 = 3))$$

$$+ P(W_1 = 6)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$+ \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{2}{8} + \frac{3}{8} \right)$$

$$+ \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{15}{64} + \frac{1}{4}$$

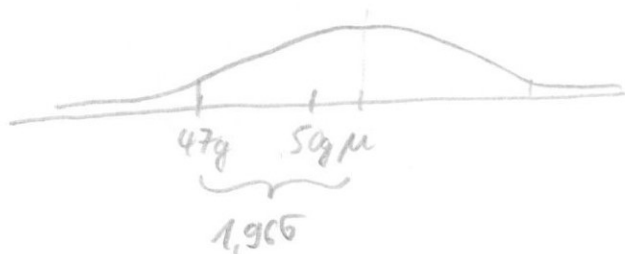
$$= \frac{4 + 15 + 16}{64} = \frac{35}{64}$$

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} \text{a) } W(\text{in } [47\text{g}; 53\text{g}]) &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) \\ &= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1.5)) \\ &= 2 \cdot \Phi(1.5) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.93319 - 1 \\ &= 0.86638 \end{aligned}$$

$$\text{b) } 1.96\sigma = 3\text{g} \Rightarrow \sigma = \frac{3\text{g}}{1.96} \approx 1.53$$

c)



$$\mu = 47\text{g} + 1.96 \cdot 1.7\text{g} = 50.332\text{g}$$