Aufgabe 1

R ist reflexiv, denn für $\alpha = 1$ gilt $z = 1 \cdot z$,

also $z R z$ für alle $z \in \mathbb{C}$

R ist transitiv, denn:

Sei $z_1 R z_2$ und $z_2 R z_3$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{>0}$ mit

$z_1 = \alpha \cdot z_2$ und $z_2 = \beta \cdot z_3$

$\Rightarrow z_1 = \alpha \cdot (\beta \cdot z_3) = (\alpha \beta) \cdot z_3 = \gamma \cdot z_3$ mit $\gamma = \alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^{>0}$

$\Rightarrow z_1 R z_3$

R ist symmetrisch, denn:

Sei $z_1 R z_2 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^{>0} : z_1 = \alpha \cdot z_2$

$\Rightarrow z_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot z_1 = \gamma \cdot z_1$ mit $\gamma = \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^{>0}$

$\Rightarrow z_2 R z_1$

R ist nicht antisymmetrisch, denn für $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$ gilt

$z_1 R z_2$ (da $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$)

und $z_2 R z_1$ (da $2 = 2 \cdot 1$)

aber $z_1 \neq z_2$

$\Rightarrow$ R ist eine Äquivalenzrelation aber keine Ordnungsrel.

Aufgabe 2 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

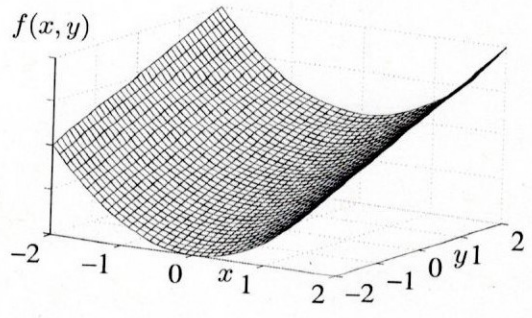
Welche Funktion erzeugt das nebenstehende „Funktionsgebirge“?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

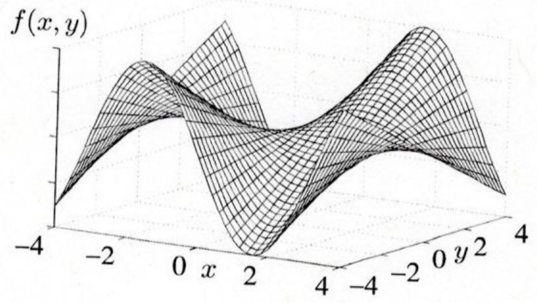
a)

$f(x,y) = x^2 + y$	X
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	
$f(x,y) = x + y^2$	
$f(x,y) = x \cdot y^2$	
Enthaltung	



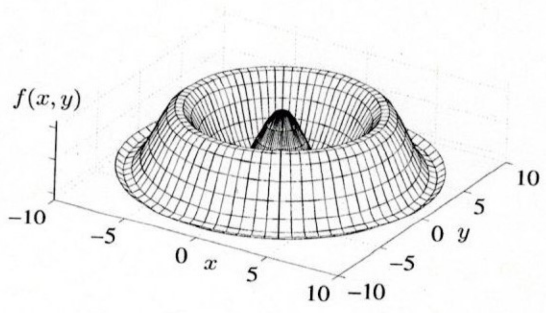
b)

$f(x,y) = \sin(x) + y$	
$f(x,y) = \sin(x) \cdot y$	X
$f(x,y) = x + \sin(y)$	
$f(x,y) = x \cdot \sin y$	
Enthaltung	



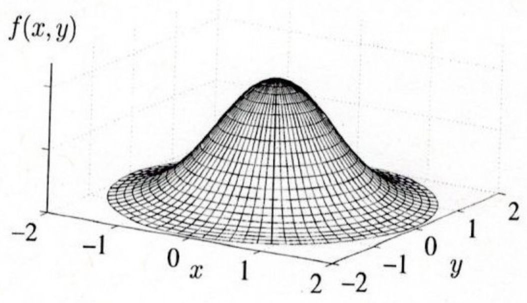
c)

$f(x,y) = \cos(x+y)$	
$f(x,y) = \cos(xy)$	
$f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}$	X
$f(x,y) = \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y}$	
Enthaltung	



d)

$f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-y^2}}$	
$f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x+y)}$	
$f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$	
$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2}$	X
Enthaltung	



Aufgabe 3

a) $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x, 6y)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0)$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6x_0 \\ 6y_0 \end{pmatrix} = (1-6\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

c) Es ist $$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 6y_1 \end{pmatrix}$$
$$= (1-6\lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (1-6\lambda) \cdot (1-6\lambda) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
$$= (1-6\lambda)^2 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

d) d1) $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (1-6\lambda)^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

d2) $\lambda \in \left]0 ; \frac{1}{6}\right[$

Aufgabe 4

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} \frac{y}{(c+xy)^2}\, d(x,y)$$

$$= \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} \frac{y}{(c+xy)^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\frac{1}{c+xy} \Big|_{x=0}^{1} \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\frac{1}{c+y} + \frac{1}{c} \right) dy$$

$$= \left(-\ln|c+y| + \frac{1}{c}\cdot y \right) \Big|_{y=0}^{2}$$

$$= -\ln|c+2| + \frac{2}{c} + \ln|c|$$

Aufgabe 5

Mit $y_0 = y$ und $y_1 = y'$ ist

$$\begin{bmatrix} y_0' = y' = y_1 \\ y_1' = y'' = y^2 + x^2 \cdot y' = y_0^2 + x^2 \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

mit AB $y_0(3) = 2,\ y_1(3) = -1$

Damit führt das Euler-Verfahren zu

$$\begin{pmatrix} y_0(3{,}1) \\ y_1(3{,}1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_0(3) + 0{,}1 \cdot y_0'(3) \\ y_1(3) + 0{,}1 \cdot y_1'(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 0{,}1 \cdot y_1(3) \\ -1 + 0{,}1\left((y_0(3))^2 + 3^2 \cdot y_1(3)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 0{,}1 \cdot (-1) \\ -1 + 0{,}1 \cdot (2^2 + 9 \cdot (-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_0(3{,}2) \\ y_1(3{,}2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_0(3{,}1) + 0{,}1 \cdot y_0'(3{,}1) \\ y_1(3{,}1) + 0{,}1 \quad y_1'(3{,}1) \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1{,}9 + 0{,}1 \cdot y_1(3{,}1) \\ -1{,}5 + 0{,}1 \cdot \left((y_0(3{,}1))^2 + 3{,}1^2 \cdot y_1(3{,}1)\right) \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1{,}9 + 0{,}1 \cdot (-1{,}5) \\ -1{,}5 + 0{,}1 \cdot \left(1{,}9^2 + 3{,}1^2 \cdot (-1{,}5)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ -2{,}5805 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

a) Wie man bspw. an den Definitionen von a_n, b_n und c_n sieht, gilt für $N=4$: $c_n = a_n - j \cdot b_n$

Da b_0 immer gleich 0 und auch $b_2 = b_{4/2} = 0$ ist,

ist $c_0 = 2$

$c_1 = 4 - 2j$

$c_2 = -3$

$c_3 = c_1^* = 4 + 2j$

b) $$c_{10,13} = \frac{1}{\sqrt{100}} \cdot e^{-j\frac{2\pi \, 10 \cdot 13}{100}}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot e^{-j\,2{,}6\cdot\pi}$$

$$= \frac{1}{10} \left(\cos(2{,}6\cdot\pi) - j \cdot \sin(2{,}6\,\pi) \right)$$

$$\approx 0{,}095 \quad - j \cdot (-0{,}031)$$

$$= 0{,}095 \quad + j \cdot 0{,}031$$

Aufgabe 7

a) $E(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 = 3{,}6$

$V(X) = (1-3{,}6)^2 \cdot 0{,}3 + (3-3{,}6)^2 \cdot 0{,}1 + (5-3{,}6)^2 \cdot 0{,}6$

$= 2{,}6^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}1 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}6$

$= 3{,}24$

Stdabw $= \sqrt{V(X)} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$

b) W(höchstens 3 Versuche)

= P(beim ersten Mal 1)

+ P(beim zweiten Mal erste 1)

+ P(" dritten " " ")

$= 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}3$

$= 0{,}657$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Mit $P_{\mu,\sigma}(]a,b[)$ wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ einen Wert im Intervall $]a,b[$ annimmt.

Geben Sie in der folgenden Tabelle den jeweils fehlenden Wert so an, dass $P_{\mu,\sigma}(]a,b[)$ gleich der links dargestellten Wahrscheinlichkeit ist.

	μ	σ	a	b
$P_{3,2}(]3,7[)$	0	1	0	2
$P_{0,1}(]-1,2[)$	3	2	1	7
$P_{-1,2}(]-1,3[)$	0	3	0	6
$P_{0,1}(]2,\infty[)$	6	2	$-\infty$	2