Aufgabe 1 ($2 + 2 + 2 + 6 \cdot 2 = 18$ Punkte)

Sei $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ und Σ^* alle aus den Ziffern 1,2,3 und 4 bildbaren Zahlen inklusive der „leeren“ Zahl „“. Auf Σ^* sei durch die folgende Angabe eine Relation R definiert:

$w \in \Sigma^*$ steht in Relation zu $1w4$ und $2w3$.

Gültige Zahlen seien „“ und alle $w \in \Sigma^*$ mit „“R^+w.

a) Geben Sie vier verschiedene gültige Zahlen ungleich „“ an:

14, 23, 1144, 1234

b) Wieviele verschiedene zehn-stellige gültige Zahlen gibt es? 5 Schritte → $2^5 = 32$ je 2 mögl.

c) Geben Sie w_1, $w_2 \in \Sigma^*$ an mit

$w_1 \; R^2 \; 12123434$ und $2233 \; R^3 \; w_2$, wobei w_2 mit 212 beginnt.

$w_1 =$ 1234 $\qquad w_2 =$ 212|2233|343

d) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob jeweils die Aussage stimmt oder nicht.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
Jede gültige Zahl besitzt genauso viele 1en wie 2en.		X	
Jede gültige Zahl besitzt genauso viele 2en wie 3en.	X		
Jede Zahl $w \in \Sigma^*$, die genauso viele 2en wie 3en und genauso viele 1en wie 4en besitzt, ist gültig.		X	
Jede Zahl, die aus n 1en gefolgt von n 2en gefolgt von n 3en gefolgt von n 4en besteht, ist gültig.	X		
Jede gültige Zahl hat eine durch 5 teilbare Quersumme.	X		
Jede Zahl $w \in \Sigma^*$, deren Quersumme durch 5 teilbar ist, ist gültig.		X	

Aufgabe 2 ($10 \cdot 2 = 20$ Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle (bzgl. des Ursprungs) rotationssymmetrischen differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
$f(0,0) = 0$		X	
$f(2,1) = f(1,2)$	X		
$f(1,1) = f(2,0)$		X	
$f(3,4) = f(5,0)$	X		
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0) = 0$.		X	
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, 0) = 0$.	X		
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.	X		
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ steht $\operatorname{grad} f(\vec{x})$, senkrecht auf $\vec{x}$.		X	
Für den Kreis K_1 um den Ursprung mit Radius 1 gilt $\int_{K_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$.		X	
Für $D_1 = [0,1] \times [0,1]$ und $D_2 = [-1,0] \times [0,1]$ gilt $\int_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.	X		

Aufgabe 3

a) $$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2z \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2e^{xy} & 0 \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

b) Gesucht: $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ mit $J_f(1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = -f(1,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1-2 \\ 1+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \Delta x = 1 \quad , \quad \Delta x + \Delta y = -2 \quad , \quad \Delta z = -1$

$\Delta y = -3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) Wegen $x = r \cdot \cos \varphi$ in Polarkoordinaten ist

$$f(r,\varphi) = (r \cdot \cos \varphi)^2 = r^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

b) $$\int_{K_2} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_{r=0}^{2} r^3 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

$$= 4 \cdot \pi$$

$$= 4\pi$$

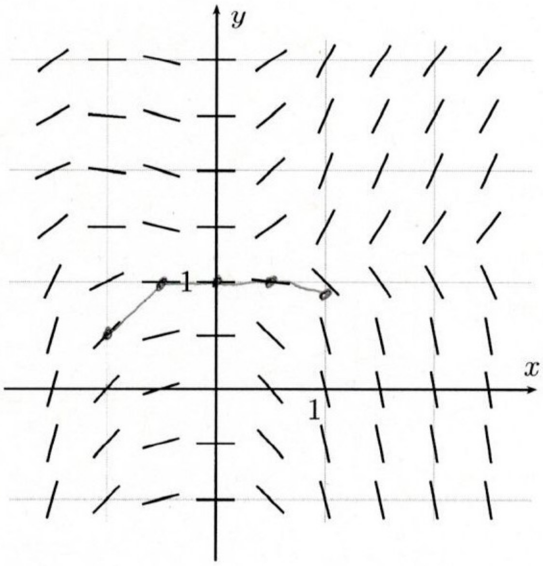
Aufgabe 5 $(2 + 2 + 3 = 7$ Punkte$)$

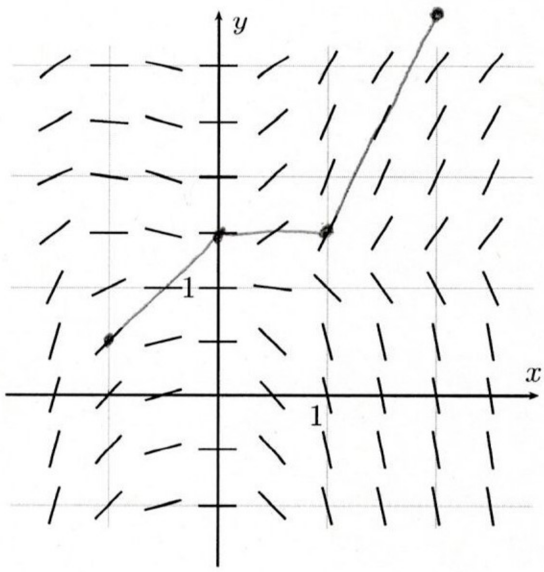
Gegeben ist das abgebildete Richtungsfeld zu einer Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$.

Gesucht sind approximative Lösungsverläufe zur Anfangsbedingung $y(-1) = 0.5$.

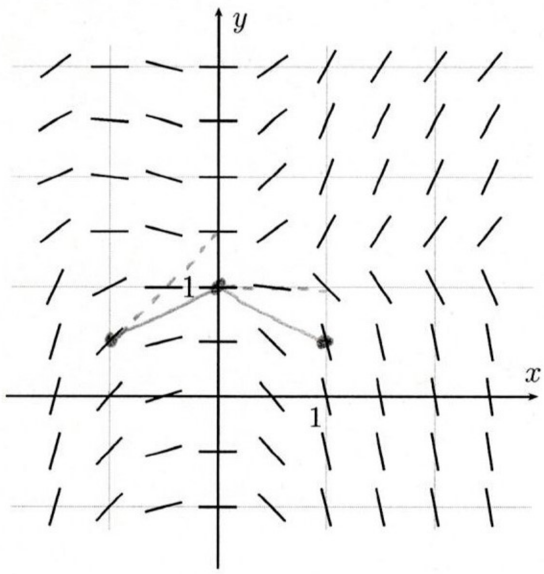
a1) Zeichnen Sie in das linke Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch vier Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 0.5 erhält.

a2) Zeichnen Sie in das rechte Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch drei Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 1 erhält.





b) Zeichnen Sie in das folgende Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch zwei Schritte des Heun-Verfahrens zur Schrittweite 1 erhält.



Aufgabe 6

Da f offensichtlich ungerade ist, sind alle $a_n = 0$.

Zur Berechnung der b_n nutze das Intervall $[-\pi ; \pi]$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \sin(nx)}_{\text{gerade Fkt}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\pi/2} 1 \cdot \sin(nx) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{n} \cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(n \cdot \frac{\pi}{2})}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi \cdot n} \left(1 - \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

also $b_1 = \frac{2}{\pi} \cdot (1 - 0) = \frac{2}{\pi}$

$b_2 = \frac{2}{\pi \cdot 2} (1 - (-1)) = \frac{2}{\pi}$

$b_3 = \frac{2}{\pi \cdot 3} (1 - 0) = \frac{2}{3\pi}$

$b_4 = \frac{2}{\pi 4} (1 - 1) = 0$

$b_5 = \frac{2}{\pi \cdot 5} (1 - 0) = \frac{2}{5\pi}$

$\Rightarrow$ FR: $\frac{2}{\pi} \cdot \sin x + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(2x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \ldots$

Aufgabe 7

Auswahl von 4 Positionen für blau		Auswahl von 3 Pos. bei den restlichen 4 für gelb		eine übrigen Pos. für rot
$\binom{8}{4}$	$\cdot$	$\binom{4}{3}$	$\cdot$	1

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}} \cdot \frac{4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}} \cdot 1$$

$$= 70 \cdot 4$$

$$= 280$$

Aufgabe 8

a) Es muss gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^3}\,dx = c \cdot \frac{-1}{2} x^{-2} \Big|_1^{\infty}$$

$$= c \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} c$$

$\Rightarrow c = 2$

b) $$P([2;3]) = \int_2^3 \frac{2}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x^2}\Big|_2^3 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-4+9}{36} = \frac{5}{36} \approx 0{,}14$$

c) $$0{,}5 = \int_{-\infty}^{x_{0,5}} f(x)\,dx = \int_1^{x_{0,5}} \frac{2}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x^2}\Big|_1^{x_{0,5}}$$

$$= -\frac{1}{x_{0,5}^2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{0,5}^2} = 0{,}5 \Rightarrow x_{0,5}^2 = 2 \Rightarrow x_{0,5} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

d) $$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\,dx$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 + 2 = 2$$