Aufgabe 1

a) 6, 3, 1.5, 0.75

b) Nein, da z.B. $1 S 2$ und $2 S 4$ aber nicht $1 S 4$.

c) Ja. Zu zeigen: Wenn $x S y$ und $y S x$ gilt, dann ist $x = y$.

Sei also $x S y$ und $y S x$

$\Rightarrow \quad y = 2x$ und $x = 2y$

$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot (2y) = 4y \quad | -y$

$\Rightarrow \quad 0 = 3y \quad | :3$

$\Rightarrow \quad y = 0$

Wegen $x = 2y$ folgt dann $x = 2 \cdot 0 = 0$.

Also ist $x = 0 = y$.

d) Ind. Anf.: $n = 1$: $1 S^1 2 \Leftrightarrow 1 S 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \cdot 1$ ✓

Ind. Schritt: $n \curvearrowright n+1$

Ind. Vor.: $1 S^n 2^n$

zu zeigen: $1 S^{n+1} 2^{n+1}$

Es gilt nach I.V.: $1 S^n 2^n$

und nach Def. von S: $2^n S 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

$\Rightarrow \quad 1 S^{n+1} 2^{n+1}$

Aufgabe 2

a) $$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \cdot e^{xy} & e^{xy} + xy \cdot e^{xy} \\ y^2 & 2xy \\ 6(3x+y) & 2(3x+y) \end{pmatrix}$$

b) $$f(0{,}05;\, 0{,}9) \approx f(0,1) + J_f(0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$

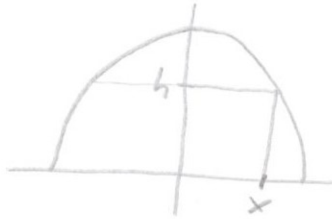
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}05 \\ 1{,}1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

In Höhe h erhält man einen quadratischen Querschnitt mit Seitenlänge s.

Dabei gilt für $x = \frac{s}{2}$:



$$h = 2 - \frac{8}{9}x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{9}x^2 = 2 - h$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{9}{8}(2-h)}$$

also $s(h) = 2 \cdot x = 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}(2-h)}$

Die Querschnittsfläche ist also $(s(h))^2$ und damit

$$V = \int_0^2 (s(h))^2 \, dh = \int_0^2 \left(2 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}(2-h)}\right)^2 dh$$

$$= \int_0^2 4 \cdot \frac{9}{8}(2-h) \, dh$$

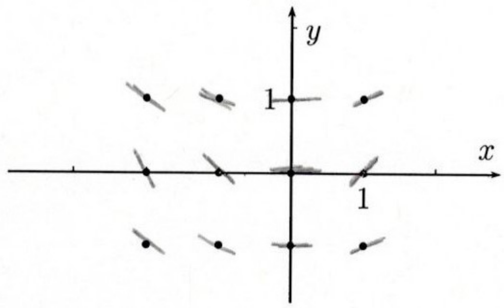
$$= \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{2}(2-h)^2 \Big|_0^2\right) = \frac{9}{2}\left(0 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = 9$$

Aufgabe 4 (4 + 10 = 14 Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x}{y^2+1}.$$

a) Zeichnen Sie in das Diagramm an den markierten zwölf Punkten ($x = -2, -1, 0, 1$, $y = -1, 0, 1$) die Richtungselemente für das Richtungsfeld der Differenzialgleichung.



b) Führen Sie

b1) zwei Schritte des Euler-Verfahrens

b2) einen Schritt des Heun-Verfahrens

zur Lösung des Anfangswertproblems mit $y(-2) = 1$ zu der Differenzialgleichung, Schrittweite 0.5, aus.

b1) $y(-1{,}5) \approx y(-2) + 0{,}5 \cdot \underbrace{y'(-2)}_{= \frac{-2}{(y(-2))^2+1} = \frac{-2}{1+1} = -1}$

$= 1 + 0{,}5 \cdot (-1) = 0{,}5$

$y(-1) \approx y(-1{,}5) + 0{,}5 \cdot \underbrace{y'(-1{,}5)}_{= \frac{-1{,}5}{(y(-1{,}5))^2+1} \approx \frac{-1{,}5}{0{,}25+1} = -1{,}2}$

$\approx 0{,}5 + 0{,}5 \cdot (-1{,}2) = -0{,}1$

b2) Test-Euler-Schritt wie bei b1) führt zu $(-1{,}5;\ 0{,}5)$.
Dort ist die Steigung $-1{,}2$ (s. b1))

$\Rightarrow$ mittlere Steigung $= \frac{1}{2} \cdot (-1 + (-1{,}2)) = -1{,}1$

$\Rightarrow y_{Heun}(-1{,}5) = y(-2) + 0{,}5 \cdot (-1{,}1)$

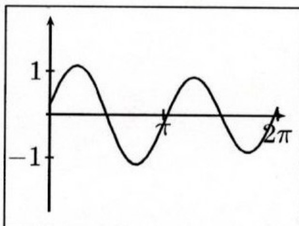
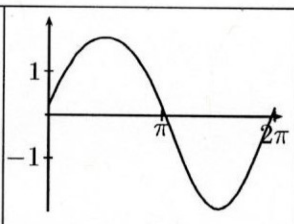
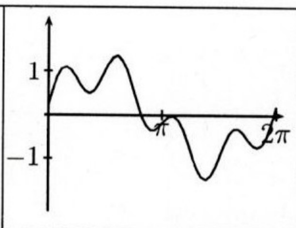
$= 1 + 0{,}5 \cdot (-1{,}1) = 0{,}45.$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

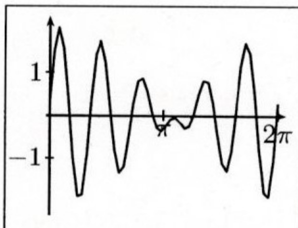
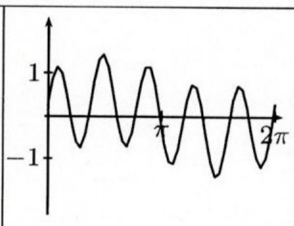
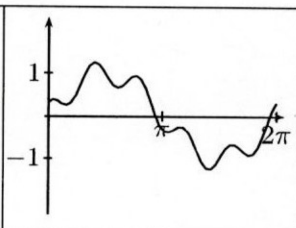
Welche der Bilder werden durch die übliche Fourierreihe mit den angegebenen Fourierkoeffizienten dargestellt? Alle nicht angegebenen Fourierkoeffizienten sind jeweils gleich Null.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung" (1.5 Punkte) an.

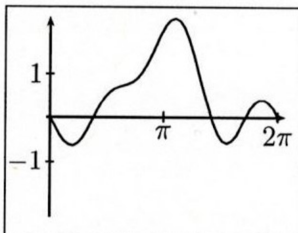
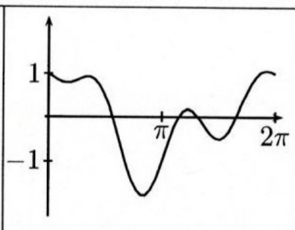
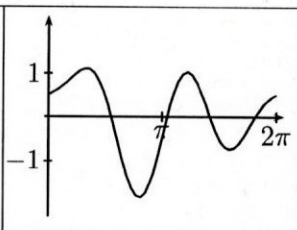
a) $a_1 = 0.2, \quad b_2 = 1$

			Enthaltung
X			

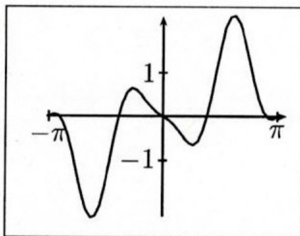
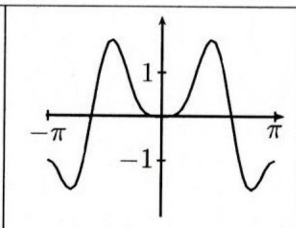
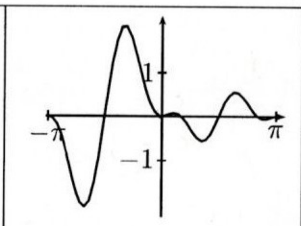
b) $a_5 = 0.3, \quad b_1 = 1$

			Enthaltung
		X	

c) $a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 0.5, \quad b_3 = -0.5$

			Enthaltung
X			

d) $a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -0.5, \quad a_4 = 0.5$ (Tipp: Symmetrie!)

			Enthaltung
	X		

Aufgabe 6

a) Wegen $2 = a_0 = \frac{2}{4} \cdot (f_0 + f_1 + f_2 + f_3)$

$= \frac{1}{2} \cdot (2 - 1 + 0 + c)$

$= \frac{1}{2} \cdot (1 + c)$

muss $c = 3$ sein

(Alternativ kann man f_3 auch durch die Rücktrafo der a_0, a_1, a_2 und b_1 berechnen)

b) Es gilt $b_{N-n} = -b_n$, bei $N = 4$ also

$\underset{\overset{\parallel}{b_2}}{b_{4-2}} = -b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 0$

und $b_3 = b_{4-1} = -b_1 = +2$

Ferner wegen $a_{n+N} = a_n$

$a_4 = a_0 = 2.$

Aufgabe 7

W'(höchstens 2mal „6")

= W'(keine „6") + W'(genau eine „6") + W'(genau zwei „6")

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \cdot \frac{1}{6} + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{2} + 10 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{8} \cdot \frac{25 + 50 + 45}{36}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{8} \cdot \frac{10}{3}$$

$$\approx 0{,}77$$

Aufgabe 8

a) $P(\text{Tor in } [0; 30\,\text{min}]) = \int_0^{30\,\text{min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt$

$= -e^{-\lambda t}\Big|_0^{30\,\text{min}} = -e^{-0{,}02\,\text{min}^{-1} \cdot 30\,\text{min}} - (-1)$

$= 1 - e^{-0{,}6} \approx 0{,}45$

b) $0{,}3 = P([0; 45\,\text{min}]) = \int_0^{45\,\text{min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt$

$= -e^{-\lambda t}\Big|_0^{45\,\text{min}} = -e^{-\lambda \cdot 45\,\text{min}} - (-1)$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda \cdot 45\,\text{min}} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$\Leftrightarrow -\lambda \cdot 45\,\text{min} = \ln 0{,}7$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}7}{45}\,\text{min}^{-1} \approx 0{,}008$

c) $40\,\text{min} = \text{Erwartungswert } E(x) = \frac{1}{\lambda}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{40}\,\text{min}^{-1}$

d) $P = P(\text{Mannschaft 1 mindestens 1 Tor in 90 Min und Mann. 2 kein Tor in 90 Min})$

$= P(\text{Tor für Mann 1 in } [0, 90\,\text{min}]) \cdot P(\text{kein Tor für Mann 2 in } [0, 90\,\text{min}])$

$= P_{\lambda_1}([0, 90\,\text{min}]) \cdot (1 - P_{\lambda_2}([0, 90\,\text{min}])$

$= \int_0^{90\,\text{min}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt \cdot \left(1 - \int_0^{90\,\text{min}} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt\right)$

$= -e^{-\lambda_1 t}\Big|_0^{90\,\text{min}} \cdot \left(1 - (-e^{-\lambda_2 t})\Big|_0^{90\,\text{min}}\right)$

$= (-e^{-0{,}9} + 1) \cdot (1 + e^{-1{,}35} - 1)$

$= (1 - e^{-0{,}9}) \cdot e^{-1{,}35} \approx 0{,}15$

e) größere Gewinnchance $\hat{=}$ im Durchschnitt schneller Tore

$\hat{=}$ kleinerer Erwartungswert $\hat{=}$ kleineres $\frac{1}{\lambda}$ $\Rightarrow$ größeres λ!