Aufgabe 1

Ind. Anf: $n=0$: $a_0 = 0 = 0 \cdot (0-1)$ ✓

Ind. Schluss: $n \to n+1$

Ind. Vor.: $a_n = n \cdot (n-1)$

zu zeigen: $a_{n+1} = (n+1) \cdot ((n+1)-1) = (n+1) \cdot n$

Es ist $a_{n+1} \overset{\text{Def}}{=} a_n + 2n$

$$\overset{\text{Ind. Vor.}}{=} n \cdot (n-1) + 2n$$

$$= n^2 - n + 2n$$

$$= n^2 + n$$

$$= (n+1) \cdot n.$$

Aufgabe 2 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Welche Eigenschaften besitzen die folgenden Relationen R und S?

Kreuzen Sie die entsprechenden Tabelleneinträge an.

Jedes richtige Kreuz zählt $+1$, jedes falsche -1 Punkte; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

- Auf der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist die Relation R definiert durch

$$z_1 R z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2),$$

d.h., komplexe Zahlen mit gleichem Realteil stehen zueinander in Relation.

- Auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist die Relation S definiert durch

$$S \;=\; \{(n,n),(n,n+1)\,|\,n\in\mathbb{N}\},$$

d.h., jede Zahl steht in Relation zu sich selbst und zu ihrem Nachfolger.

	für R		für S	
	gilt	gilt nicht	gilt	gilt nicht
reflexiv	X		X	
transitiv	X			X
symmetrisch	X			X
antisymmetrisch		X	X	

Aufgabe 3

a) $\operatorname{grad}(f(x,y)\cdot g(x,y)) = \operatorname{grad}(xy^2 \cdot \sin(x^2+y))$

$= (y^2 \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot \cos(x^2+y) \cdot 2x,$

$x \cdot 2y \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot \cos(x^2+y))$

$= (y^2, x \cdot 2y) \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot (\cos(x^2+y) \cdot 2x,$
$\cos(x^2+y))$

$= \operatorname{grad}(xy^2) \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot \operatorname{grad}(\cos(x^2+y))$

$= \operatorname{grad}(f(x,y)) \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot \operatorname{grad}(g(x,y))$

b) $\operatorname{grad}(f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}))$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}))\right)$

$\overset{\text{Produkt}}{\underset{\text{regel}}{=}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x})\right) \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} g(\vec{x}), \dots,\right.$

$\left.\left(\frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x})\right) \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} g(\vec{x})\right)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}), \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x})\right) \cdot g(\vec{x})$

$+ f(\vec{x}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g(\vec{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} g(\vec{x})\right)$

$= \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} g(\vec{x})$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Im folgenden sind drei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ angegeben bestehend aus der Kombination einer schnellen und einer langsamen Kreis- bzw. Cosinusbewegung.

Welches der Bilder unten gehört zu welcher Funktion? Tragen Sie die entsprechende Nummer ein!

(Nicht alle Bilder kommen vor!)

	Bild-Nr.
$f(t) \;=\; 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(8t) \\ \sin(8t) \end{pmatrix}$	4
$f(t) \;=\; (2 + \cos(8t)) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	5
$f(t) \;=\; 3\cos(8t) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	2

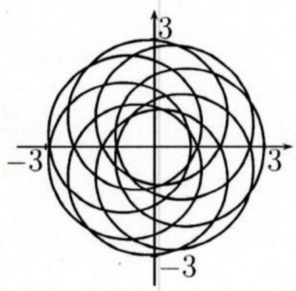


Bild 1

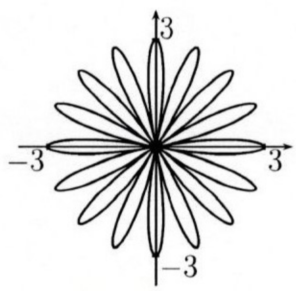


Bild 2

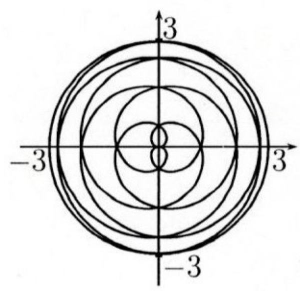


Bild 3

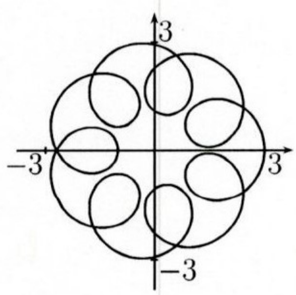


Bild 4

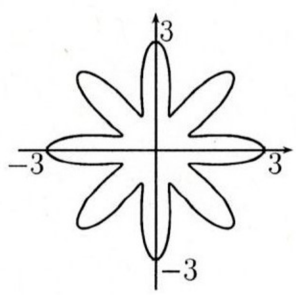


Bild 5

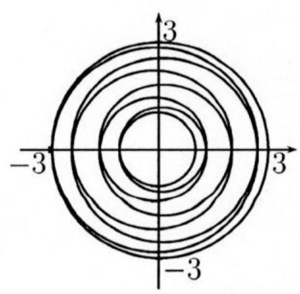


Bild 6

Aufgabe 5

$$\int_D (x+y)\cdot\cos(x\cdot y)\, d(x,y)$$

$$= \int_D x\cdot\cos(xy)\, d(x,y) + \int_D y\cdot\cos(xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^{1/2}\int_{y=0}^{\pi} x\cdot\cos(xy)\, dy\, dx + \int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{1/2} y\cdot\cos(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{\pi} dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(xy)\Big|_{x=0}^{1/2} dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(\pi x)\, dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}y)\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x)\Big|_{x=0}^{1/2} + (-2)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}y)\Big|_{y=0}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi} + (-2)\cdot(0-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 6

a) Ansatz: $y(x) = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow y'(x) = 2ax + b$

in die DGL eingesetzt:

$2ax + b = ax^2 + bx + c - 2x^2$

$\Leftrightarrow 0 = (a-2)x^2 + (b-2a)x + c - b$

Dies ist erfüllt für $a = 2$, $b = 4$ und $c = 4$

$\Rightarrow y(x) = 2x^2 + 4x + 4$

b) $y(1{,}5) \approx y(1) + 0{,}5 \cdot y'(1)$

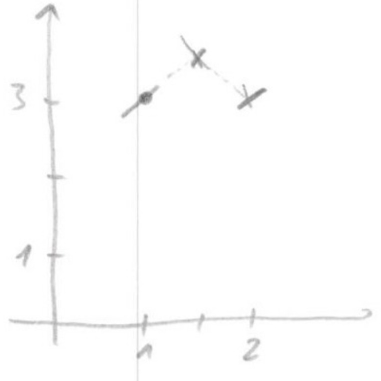
$= 3 + 0{,}5 \cdot (y(1) - 2 \cdot 1^2)$

$= 3 + 0{,}5 \cdot (3 - 2) = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$

$y(2) \approx y(1{,}5) + 0{,}5 \cdot y'(1{,}5)$

$\approx 3{,}5 + 0{,}5 \cdot (y(1{,}5) - 2 \cdot 1{,}5^2)$

$\approx 3{,}5 + 0{,}5\,(3{,}5 - 4{,}5) = 3{,}5 - 0{,}5 = 3$



Aufgabe 7

Mit $x_0 = \frac{2\pi \cdot 0}{6} = 0$ ist

$$f_0 = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{2} \left(a_n \cdot \underbrace{\cos(n \cdot \overset{0}{x_0})}_{=1} + b_n \cdot \sin(n \cdot \overset{0}{x_0}) \right) + \frac{1}{2} a_3 \underbrace{\cos(3 \cdot \overset{0}{x_0})}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2.4 + 1.1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \qquad + \frac{1}{2} \cdot (-1.6) \cdot 1$$

$$= 1.2 + 1.1 - 0.8 = 1.5$$

Mit $x_3 = \frac{2\pi \cdot 3}{6} = \pi$ ist

$$f_3 = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{2} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot \pi) + b_n \underbrace{\sin(n \cdot \pi)}_{=0} \right) + \frac{1}{2} a_3 \cos(3 \cdot \pi)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2.4 + 1.1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \qquad + \frac{1}{2} \cdot (-1.6) \cdot (-1)$$

$$= 1.2 - 1.1 + 0.8 = 0.9$$

Aufgabe 8

a) $5 \cdot \binom{n}{2} = \binom{n}{3}$

$\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$\Leftrightarrow \quad 15 = n-2$

$\Leftrightarrow \quad n = 17$

b) $3570 = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow 7140 = n^2 - n$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 7140 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7140}$

macht hier keinen Sinn

$\Leftrightarrow n = 0{,}5 + 84{,}5 = 85$

Aufgabe 9

a) a1) $1mm = 2\sigma$

$$\Rightarrow P(Abw. > 1mm) = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$$

a2) $P(Abw. > 0{,}8\,mm) = 1 - P(Abw. \leq 0{,}8mm)$

$$= 1 - P([19{,}2mm ; 20{,}8mm])$$

$$= 1 - \left(\phi\left(\frac{20{,}8mm - 20mm}{0{,}5mm}\right) - \phi\left(\frac{19{,}2mm - 20mm}{0{,}5mm}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\phi(1{,}6) - \underbrace{\phi(-1{,}6)}_{= 1 - \phi(1{,}6)}\right)$$

$$= 1 - (2 \cdot \phi(1{,}6) - 1)$$

$$= 2 - 2 \cdot \phi(1{,}6) = 2 - 2 \cdot 0{,}9452 = 0{,}1096$$

b) 5% Ausschuss $\Rightarrow$ 95% innerhalb $\pm$ 0,5mm

$$\Rightarrow 1.96\,\sigma = 0{,}5mm$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{0.5mm}{1.96} \approx 0{,}255\,mm$$

c) $\bar{x} = \frac{1}{5}(19{,}8 + 20{,}8 + 20{,}1 + 19{,}4 + 20{,}4)\,mm = 20{,}1\,mm$

$$s^2 = \frac{1}{4}\left((19{,}8 - 20{,}1)^2 + \ldots + (20{,}4 - 20{,}1)^2\right) mm^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(0{,}3^2 + 0{,}7^2 + 0^2 + 0{,}7^2 + 0{,}3^2\right) mm^2$$

$$= 0{,}29\,mm^2$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}29\,mm^2} \approx 0{,}54\,mm$$

Der Median ist $x_m = 20{,}1\,mm$