Aufgabe 1

a) $5 \, R \, 5+3$ und $5 \, R \, 5-2$, also $5 \, R \, 8$ und $5 \, R \, 3$

entspr. $8 \, R \, 11$ und $8 \, R \, 6$

$3 \, R \, 6$ und $3 \, R \, 1$

also $5 \, R^2 \, 11$, $5 \, R^2 \, 6$ und $5 \, R^2 \, 1$.

b) Ind. Anf.: $n = 1$

zu zeigen: $0 \, R^2 \, 1$

Es ist $0 \, R \, 3$ und $3 \, R \, 1$, also $0 \, R^2 \, 1$.

Ind. Schritt: $n \rightsquigarrow n+1$

Ind. Vor. $0 \, R^{2n} \, n$

zu zeigen: $0 \, R^{2(n+1)} \, n+1$, also $0 \, R^{2n+2} \, n+1$

Beweis: Es ist $n \, R \, n+3$ und $n+3 \, R \, n+3-2$

also $n+3 \, R \, n+1$

$\Rightarrow n \, R^2 \, n+1$

Wegen der Ind. Vor. ist $0 \, R^{2n} \, n$, also

$0 \, R^{2n+2} \, n+1$.

Aufgabe 2

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-2xye^{-x^2+4y},\ e^{-x^2+4y} + 4y\cdot e^{-x^2+4y}\right)$$

a) $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \quad -2xy = 0$ und $1+4y = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{4}$ und $x = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{x}_0 = (0, -\frac{1}{4})$

b) $f(1.95; 1.1) \approx f(2,1) + \operatorname{grad} f(2,1) \cdot \begin{pmatrix} -0{,}05 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

$= 1\cdot 1 + (-2\cdot 2\cdot 1\cdot 1,\ 1+4\cdot 1\cdot 1)\begin{pmatrix} -0{,}05 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

$= 1 + (-4, 5)\begin{pmatrix} -0{,}05 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

$= 1 + 0.2 + 0{,}5$

$= 1{,}7$

c) Die part. Fkt. in x- und y-Richtung haben in $\vec{x}_0$ die Abl. 0 (wegen $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = (0,0)$) und nach Angabe $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\vec{x}_0) > 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\vec{x}_0) > 0$.

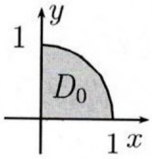
Damit ist $\vec{x}_0$ Minimalstelle der x- und y-Schnitte.

$\vec{x}_0$ kann also kein Maximalstelle von f sein sondern Minimal- oder Sattelstelle.

Aufgabe 3 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Betrachtet wird das Integral $\int_D x^2 y \,\mathrm{d}(x,y)$ zu verschiedenen Integrationsgebieten D.

Sei I_0 der Wert des Integrals zu dem nebenstehend dargestellten Viertelkreis:

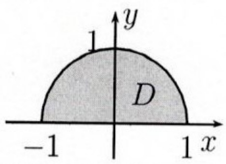
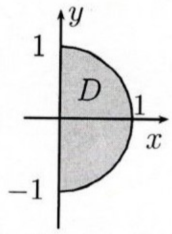
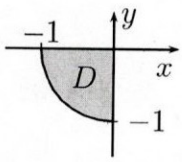
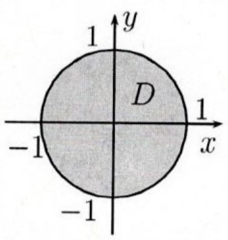


$$I_0 \;=\; \int_{D_0} x^2 y \,\mathrm{d}(x,y).$$

Kreuzen Sie zu den in der folgenden Tabelle dargestellten Integrationsgebieten an, welchen Wert jeweils das entsprechende Integral hat.

Jeder richtige Eintrag zählt +2 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte. Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

Tipp: Sie brauchen die Integrale nicht zu berechnen. Beachten Sie den Integranden!

	$-I_0$	0	I_0	$2I_0$	$4I_0$
				X	
		X			
	X				
		X			

Aufgabe 4

a) $y_0 = y$, $y_1 = y'$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_0 - x \cdot y_1 + x^2 \end{aligned}$$

AB: $y_0(2) = 3$, $y_1(2) = 1$

b) $y_0'(2) = y_1(2) = 1$

$$y_1'(2) = y_0(2) - 2 \cdot y_1(2) + 2^2$$
$$= 3 - 2 \cdot 1 + 4 = 5$$

$$\Rightarrow y_0(2.1) \approx y_0(2) + 0{,}1 \cdot y_0'(2) = 3 + 0{,}1 \cdot 1 = 3{,}1$$
$$y_1(2{,}1) \approx y_1(2) + 0{,}1 \cdot y_1'(2) = 1 + 0{,}1 \cdot 5 = 1{,}5$$

c) Test-Euler-Schritt s. b)

Bei $y_0 = 1.3$, $y_1 = 1.5$, $x = 2{,}1$ ist

$$y_0'(2.1) = y_1(2{,}1) = 1.5$$
$$y_1'(2{,}1) = y_0(2{,}1) - 2{,}1 \cdot y_1(2{,}1) + 2{,}1^2$$
$$= 3.1 - 2{,}1 \cdot 1{,}5 + 2{,}1^2$$
$$= 4{,}36$$

Die mittleren Steigungen sind also

$$y'_{0,\text{mittel}} = \frac{1}{2}(1 + 1.5) = 1.25$$
$$y'_{1\,\text{mittel}} = \frac{1}{2}(5 + 4{,}36) = 4{,}68$$

der Heun-Schritt ist also

$$y_0(2{,}1) \approx y_0(2) + 0{,}1 \cdot y'_{0\,\text{mittel}} = 3 + 0{,}1 \cdot 1{,}25 = 3{,}125$$
$$y_1(2{,}1) \approx y_1(2) + 0{,}1 \cdot y'_{1\,\text{mittel}} = 1 + 0{,}1 \cdot 4{,}68 = 1{,}468$$

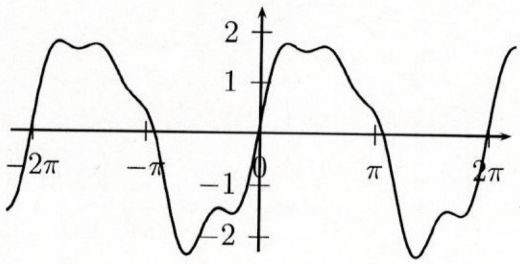
Aufgabe 5 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Welche Spalte zeigt die richtigen ersten Fourierkoeffizienten zu der links dargestellten 2π-periodischen Funktion?

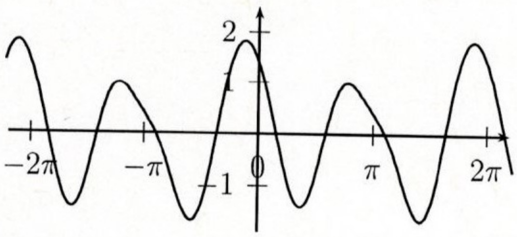
(Die weiteren Fourierkoeffizienten sind irgendwelche reellen Zahlen.)

Kreuzen Sie die richtige Spalte an!

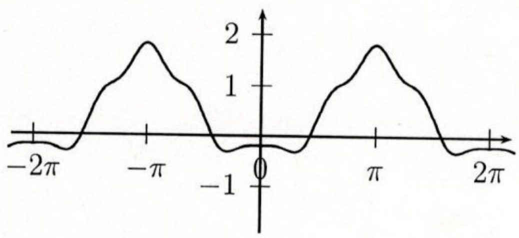
Jeder richtige Eintrag zählt +2 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte. Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.



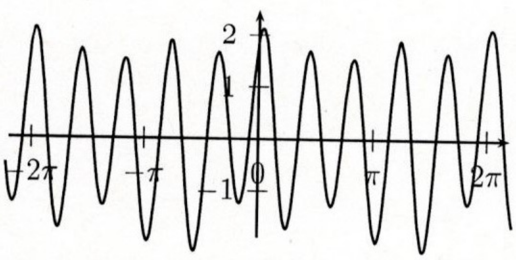
$a_0 = 0$ $a_1 = 2$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 2$ $b_1 = 0.2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = 2$
		X	



$a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$
		X	



$a_0 = -1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = 1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = -1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$	$a_0 = 1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$
	X		



$a_0 = 5$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 5$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = -0.2$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 5$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$
			X

Aufgabe 6

$$\begin{array}{cccccccc} \text{für Vieren} & & \text{für Sechsen} & & \text{für Acht} & & \text{für restliche Stellen} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \binom{8}{3} & \cdot & \binom{5}{2} & \cdot & 3 & \cdot & 7 \cdot 7 \end{array}$$

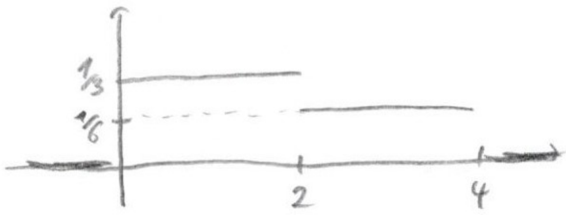
$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{1 \cdot \cancel{2 \cdot 3}} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$= 56 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 49$$

$$= 82320$$

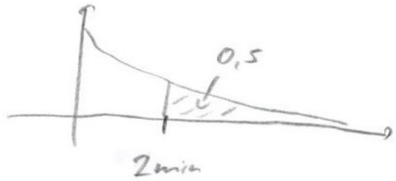
Aufgabe 7

a)



b)

Aufgabe 8



a) $$0{,}5 = \int_{2min}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= -e^{-\lambda x} \Big|_{2min}^{\infty}$$

$$= 0 + e^{-\lambda \cdot 2min}$$

$$\Leftrightarrow \ln 0.5 = -\lambda \cdot 2min$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}5}{2min} \approx 0{,}347\ min^{-1}$$

b) $$E(x) = \frac{1}{\lambda} \approx 2{,}89\ min$$

c) $$P(X \leq 30\,sec) = P(X \leq \tfrac{1}{2}\,min)$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}min} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= -e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\frac{1}{2}min}$$

$$\approx -e^{-0{,}347 min^{-1} \cdot \frac{1}{2} min} + 1$$

$$= 0.159.$$