
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

19.09.2024

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

> mein Buch „Höhere Mathematik kompakt" (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
>
> zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
>
> ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 10 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ_0	Bo.	Σ
Max	8	10	12	12	8	12	10	6	8	6	92	4	96

Note:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Aufgabe 2 (7 + 3 = 10 Punkte)

Auf $\mathbb{Z}$ wird eine Relation „$\equiv_3$“ (lies „kongruent modulo 3“) definiert durch

$$a \equiv_3 b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : a \;=\; b + k \cdot 3.$$

a) Zeigen Sie, dass „$\equiv_3$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

   (D..h., zeigen Sie die entsprechenden Eigenschaften unter Nutzung der Definition von „$\equiv_3$“.)

b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es, die „$\equiv_3$“ erzeugt? Geben Sie diese (mit exemplarischer Auflistung der Elemente) an.

Aufgabe 3 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der Aussagen bzgl. Monotonie der partiellen Funktionen gelten für die angegebenen Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	alle part. Fkt. in x-Richtung sind monoton wachsend			alle part. Fkt. in y-Richtung sind monoton wachsend		
	gilt	gilt nicht	Enth.	gilt	gilt nicht	Enth.
$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$						
$f(x,y) = \mathrm{e}^{x\cdot y}$						
$f(x,y) = x \cdot \mathrm{e}^{y}$						

Aufgabe 4 (8 + 4 = 12 Punkte)

Auf dem maximal möglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x + y^2}{x + 1}$$

gegeben.

a) Führen Sie ausgehend von $(x_0, y_0) = (0, 1)$ zwei Schritte des Gradientenverfahrens mit Schrittweite $\lambda = \frac{1}{2}$ zur Maximierung von f aus.

b) Welchen ersten Schritt erhält man bei einer Schrittweitensteuerung wie in der Vorlesung / dem Praktikum ausgehend von $(x_0, y_0) = (0, 1)$ mit initialer Schrittweite $\lambda = \frac{1}{2}$?

   Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $c > 0$

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} y \cdot \sin(c + xy)\, \mathrm{d}(x, y).$$

Aufgabe 6 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Zu welcher Differenzialgleichung gehört die nebenstehend gezeichnete Lösungskurve?

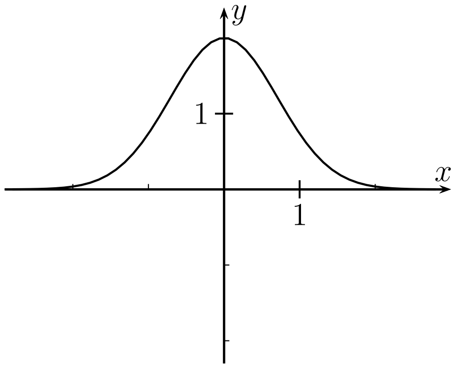
Hinweis: Genau eine Differenzialgleichung ist richtig.

Tipp: Überlegen Sie, welche Differenzialgleichungen Sie ausschließen können, da die Lösung nicht zum Richtungsfeld passt.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (4 Punkte) oder „Enthaltung“ (2 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

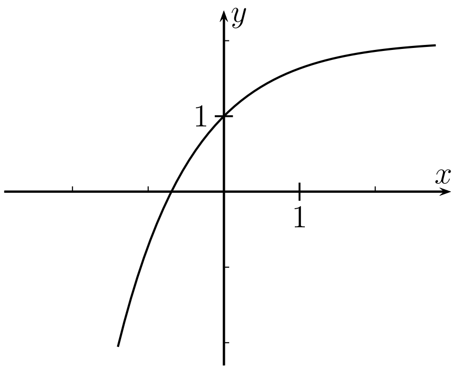
a)

$y' = -2xy$	
$y' = -2x^2y$	
$y' = -\frac{2x}{y}$	
Enthaltung	



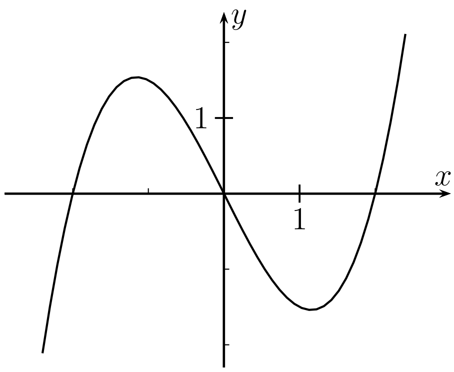
b)

$y' = 2 - y$	
$y' = 1 - x - y$	
$y' = 2xy$	
Enthaltung	



c)

$y' = \frac{y}{x} + x^2$	
$y' = -\frac{y}{x} - x^2$	
$y' = -\frac{y}{x} + y^2$	
Enthaltung	



Aufgabe 7 (10 Punkte)

Geben Sie den Beginn der Fourierreihe (bis $n \le 4$) an zur Funktion

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Wieviel Zahlen zwischen 1 und 9999999 (also maximal sieben-stellig) gibt es, die genau drei Fünfen und zwei Vieren als Ziffern besitzen?

Aufgabe 9 ($4 + 4 = 8$ Punkte)

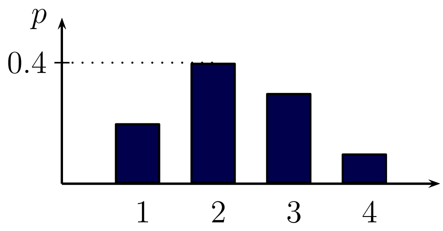
Den radioaktiven Zerfall eines bestimmten Polonium-Isotops kann man als exponentialverteilt mit $\lambda = 5\,\mathrm{s}^{-1}$ betrachten.

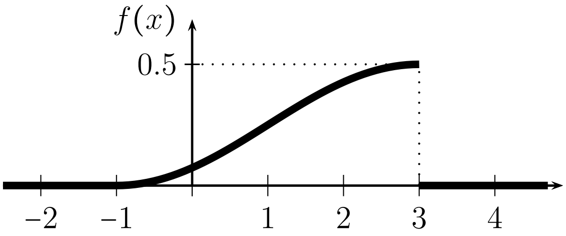
a) Wie wahrscheinlich ist ein Zerfall innerhalb von 0.1 Sekunden?

b) Was ist die Halbwertszeit, also die Zeit, nach der die Wahrscheinlichkeit für einen Zerfall gleich $\frac{1}{2}$ ist?

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Werten aus $\{1, 2, 3, 4\}$ und Wahrscheinlichkeiten $p(k)$ wie im linken Bild und X_2 eine stetige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x)$ wie im rechten Bild skizziert. Die Dichte f ist nur im Intervall $]-1; 3[$ größer als Null.





Aus den Zufallsvariablen X_1 und X_2 werden jeweils zwei neue Zufallsvariablen Y_i und Z_i $(i = 1, 2)$ erzeugt:

- $Y_i = X_i + 1$,

  d.h., Y_i erhält man, indem man die Ziehungsergebnisse von X_i jeweils um 1 erhöht;

- $Z_i = 2X_i$,

  d.h., Z_i erhält man, indem man die Ziehungsergebnisse von X_i jeweils verdoppelt.

a) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeits-Historgramme von Y_1 und Z_1 (mit Skalierung der x- und y-Achsen).

b) Skizzieren Sie die Dichtefunktionen von Y_2 und Z_2 (mit Skalierung der x- und y-Achsen).