

--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Name)

(Vorname)

(Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

18.07.2024

Prof. Georg Hoever

Klausur zum Fach Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 8 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ_0	Bon.	Σ
Max	12	13	7	14	12	7	11	16	92	4	96

Note:

Aufgabe 1 ($6 + 6 = 12$ Punkte)

Auf der Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$ ist die Relation

$$R = \{(a, b), (b, d), (c, c), (c, e), (d, a), (e, c), (f, d)\}$$

gegeben.

a) Geben Sie jeweils an, welche Relationspaare man zu R hinzufügen muss, damit R

a1) reflexiv,

a2) transitiv,

a3) symmetrisch

ist.

b) Geben Sie R^2 und R^{100} an.

Aufgabe 2 (3 + 5 + 5 = 13 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xy^2 \cdot e^{-2xz}.$$

- a) Bestimmen Sie $\text{grad } f(x, y, z)$ und geben Sie speziell $\text{grad } f(2, 1, 0)$ an.
- b) Berechnen Sie den Gradienten zu f an der Stelle $(2, 1, 0)$ näherungsweise, indem Sie jeweils numerische Ableitungen nutzen, d.h. entsprechende Differenzenquotienten, mit $h = 0.1$.
- c) Nutzen Sie die lineare Näherung, um abzuschätzen, wie groß die betragsmäßige Abweichung von $f(x, y, z)$ zu $f(2, 1, 0)$ maximal ist, wenn die Argumente x , y bzw. z jeweils von 2, 1 bzw. 0 betragsmäßig um maximal 0.1 abweichen.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Sie K_R der Kreis im \mathbb{R}^2 um den Ursprung mit Radius R .

Berechnen Sie in Abhängigkeit von R

$$\int_{K_R} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} d(x, y).$$

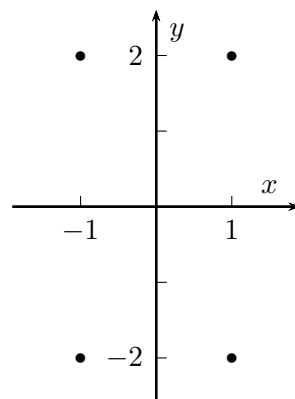
Aufgabe 4 (2 + 4 + 8 = 14 Punkte)

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$y' = 4x + 2y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 1$.

- a) Skizzieren Sie in der nebenstehenden Skizze die Richtungselemente zur Differentialgleichung an den vier markierten Punkten.
- b) Berechnen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems mit Schrittweite $h = 0.5$.



- c) Berechnen Sie zwei Schritte des Heun-Verfahrens zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems mit Schrittweite $h = 0.5$.

Aufgabe 5 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Welche Spalte zeigt die richtigen ersten Fourierkoeffizienten zu der links dargestellten 2π -periodischen Funktion?

Die weiteren Fourierkoeffizienten sind irgendwelche reellen Zahlen.

Kreuzen Sie die richtige Spalte (3 Punkte) oder „E.“ für Enthaltung (1 Punkt) an!

	$a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$	<p>E.</p>
	$a_0 = 0$ $a_1 = -2$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = -2$ $b_1 = 0.2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = -2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -2$	<p>E.</p>
	$a_0 = -1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = 1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = -1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$	$a_0 = 1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$	<p>E.</p>
	$a_0 = 5$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 5$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = -0.2$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 5$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$	<p>E.</p>

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Wie lauten die komplexen Fourierkoeffizienten c_1 , c_3 und c_5 der diskreten Fouriertransformation zu den vier Datenpunkten

$$f_0 = 3, \quad f_1 = -1, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 2?$$

Aufgabe 7 ($6 + 5 = 11$ Punkte)

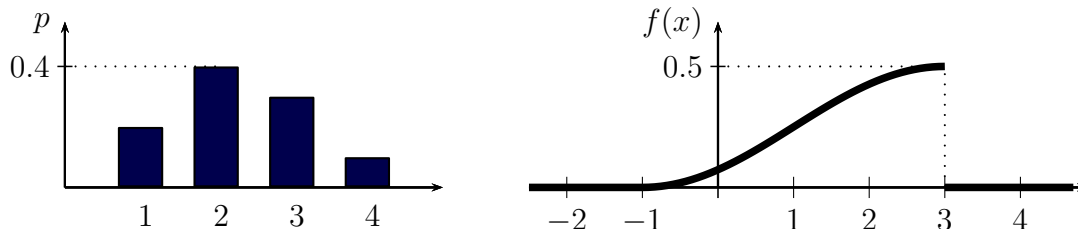
Das Fußball-Viertelfinale Deutschland-Spanien soll wahrscheinlichkeitstheoretisch analysiert werden. Dazu wird angenommen, dass jede Mannschaft innerhalb der regulären Spielzeit sechs qualifizierte Torchancen hat, die jeweils unabhängig voneinander eine gewisse Erfolgswahrscheinlichkeit haben.

Die Erfahrung der vergangenen Spiele zeigt, dass Deutschland bei einer solchen Torchance jeweils eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $p_D = 0.3$ hat, während Spanien jeweils eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $p_S = 0.4$ hat.

- a) Wie wahrscheinlich ist ein Spielausgang 3 zu 2 für Deutschland?
- b) Wie wahrscheinlich ist, dass Deutschland das Spiel zu 0 (also kein Tor für Spanien) gewinnt?

Aufgabe 8 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Werten aus $\{1, 2, 3, 4\}$ und Wahrscheinlichkeiten $p(k)$ wie im linken Bild und X_2 eine stetige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x)$ wie im rechten Bild skizziert. Die Dichte f ist nur im Intervall $] - 1; 3[$ größer als Null.



Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

- a) Sind die in der folgenden Tabelle links dargestellten Werte kleiner, gleich oder größer den Werten rechts? Tragen Sie das richtige Zeichen (2 Punkte) oder „E“ für „Enthaltung“ (1 Punkt) ein.

(Tipp: Beachten Sie bei den letzten beiden Teilen den Unterschied zwischen diskreter und stetiger Zufallsvariable!)

	<, =, > oder „E“	
$P(X_1 < 2.5)$		0.5
$P(X_2 \leq 1)$		0.5
$P(X_1 = 2)$		$P(X_1 = 3)$
$P(X_2 = 1)$		$P(X_2 = 2)$

- b) Markieren Sie den jeweils richtigen (gerundeten) Zahlenwert für die die Erwartungswerte und Standardabweichungen (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt).

$E(X_1)$		$E(X_2)$		Std.abw. von X_1		Std.abw. von X_2	
2		1		-0.2		-0.13	
2.3		1.81		0.3		0.23	
2.5		2.57		0.9		0.82	
3		3		1.3		1.34	
Enth.		Enth.		Enth.		Enth.	