
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

26.03.2024

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

> mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
>
> zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
>
> ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 08.04. statt.
Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 12.04. oder 15.04. statt.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 9 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ_0	Bon.	Σ
Max	16	10	8	13	5	9	14	8	6	89	4	93

Note:

Aufgabe 1 ($12 + 4 = 16$ Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird die Relation R definiert durch

$$x \, R \, y \quad :\Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = y \quad \text{oder} \quad 3 \cdot x = y.$$

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie den jeweils richtigen Tabelleneintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enth.
R ist reflexiv			
R ist transitiv			
R ist symmetrisch			
R ist antisymmetrisch			
$\forall\, x \in \mathbb{N} : \; x \, R^2 \, 5x$			
$\forall\, x \in \mathbb{N} : \; x \, R^2 \, 6x$			

b) Geben Sie alle $x \in \mathbb{N}$ an mit $x \, R^+ \, 120$, wobei R^+ den transitiven Abschluss von R bezeichnet.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

An verschiedenen Stellen (x_k, y_k) wurden Beobachtungen f_k gemacht:

Bei $(x_1, y_1) = (1, 0)$ ist $f_1 = 2$,

bei $(x_2, y_2) = (0, 3)$ ist $f_2 = 1$,

bei $(x_3, y_3) = (1, 2)$ ist $f_3 = 0$.

Gesucht sind die Parameter a und b zu einer Ausgleichsebene

$$f(x, y) = ax + by,$$

so dass die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen $f(x_k, y_k)$ und f_k, also

$$d = \sum_{k=1}^{3} \big(f(x_k, y_k) - f_k\big)^2,$$

minimal wird.

Aufgabe 3 $(2 + 6 = 8$ Punkte$)$

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) \ = \ \begin{pmatrix} x \cdot \cos(xy) \\ xy^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

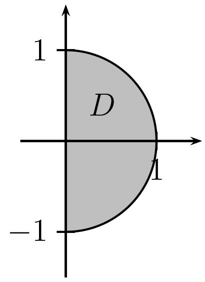
a) Geben Sie die Jacobimatrix zu f an.

b) Sei $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Geben Sie mit Hilfe von $f(x_0, y_0)$ und der Jacobimatrix an der Stelle (x_0, y_0) eine (lineare) Näherung an für $f(1.9, 0.05)$.

Aufgabe 4 (7 + 6 = 13 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten gegeben durch

$$f(r,\varphi) \;=\; (1-r)\cdot\cos\varphi.$$



a) Bestimmen Sie

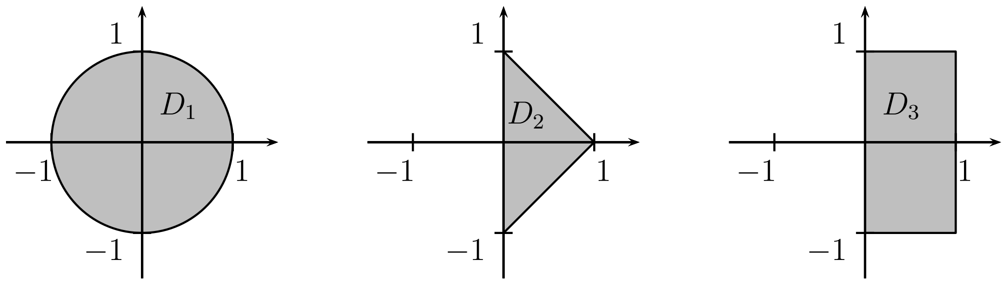
$$I \;:=\; \int\limits_D f \,\mathrm{d}(x,y),$$

wobei D der in der nebenstehenden Skizze markierte Halbkreis ist.

b) Zu den unten skizzierten Bereichen D_1, D_2 und D_3 wird jeweils $I_k \;:= \int_{D_k} f\,\mathrm{d}(x,y)$ betrachtet.

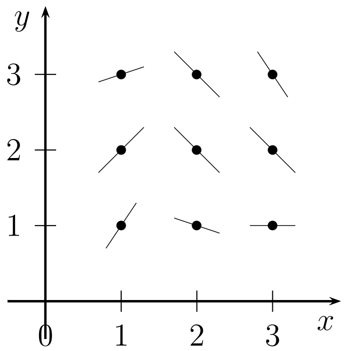
Sind I_1, I_2 bzw. I_3 jeweils größer, gleich oder kleiner als I?

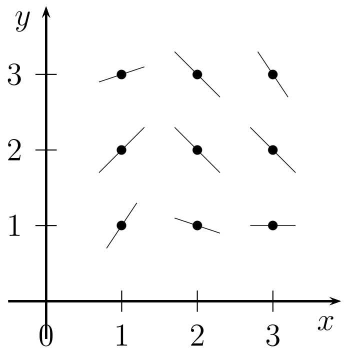
Begründen Sie Ihre Aussage! (Tipp: Beachten Sie auch den Integranden!)



Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben ist eine Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ mit einem wie folgt dargestellten Richtungsfeld (es ist zweimal das gleiche Richtungsfeld abgebildet).





Skizzieren Sie

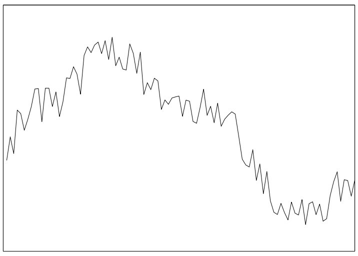
in dem linken Richtungsfeld 2 Schritte des Euler-Verfahrens,

in dem rechten Richtungsfeld 2 Schritte des Heun-Verfahrens,

jeweils zum Startwert $y(1) = 2$ und zur Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 6 (9 Punkte, davon bis zu 3 Enthaltungspunkte)

Das folgende Bild zeigt den Verlauf einer Datenreihe mit 100 Punkten. Dazu wurden die diskreten (komplexen) Fourierkoeffizienten c_n, $n = 0, \ldots, 99$, berechnet.



Nun werden einige der c_n ausgewählt (die anderen Koeffizienten werden zu 0 gesetzt) und eine Rücktransformation durchgeführt.

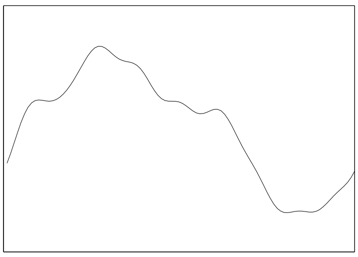
(Genauer: Es wird die Rücktransformation zu $\tilde{c_n}$ mit $\tilde{c_n} = \begin{cases} c_n, & \text{für spezielle } n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ gebildet.)

Bei welchen der folgenden Auswahl-Möglichkeiten ergeben sich die unten abgebildeten Rücktransformationen? Schreiben Sie unter die Bilder die Nummern der richtigen Auswahl (3 Punkte) oder „E“ für Enthaltung (1 Punkt).

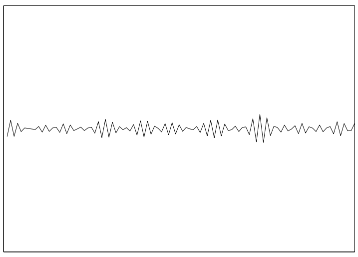
Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

Auswahl-Möglichkeiten:

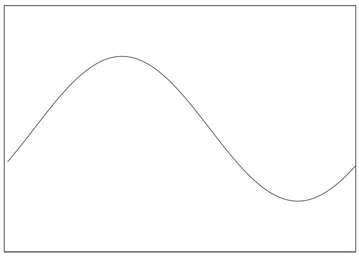
1) nur c_0 wird genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
2) nur c_1 und c_{99} werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
3) nur c_5 und c_{95} werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
4) c_n zu $n \in \{1, \ldots, 10\} \cup \{90, \ldots, 99\}$ werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.
5) c_n zu $n \in \{40, \ldots, 60\}$ werden genommen, der Rest wird zu 0 gesetzt.



Auswahl:



Auswahl:



Auswahl:

Aufgabe 7 ($2 + 4 + 8 = 14$ Punkte)

a) Zeichnen Sie das Pascalsche Dreieck zu $\binom{n}{k}$ bis zu $n \leq 7$.

b) Betrachtet wird die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+l}{k} = \binom{n+l+1}{n} \qquad (n, l \geq 0). \qquad (*)$$

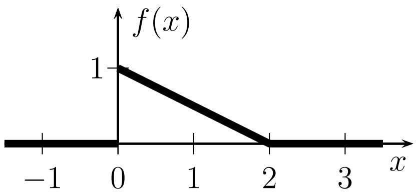
b1) Markieren Sie die relevanten Zahlen im Pascalschen Dreieck aus a) konkret für $n = 2$ und $l = 3$.

b2) Zeigen Sie $(*)$ mittels vollständiger Induktion nach n (bei festem $l \geq 0$).

Tipp: Die Additionseigenschaften der Binomialkoeffizienten (Satz 4.2 des Skripts) sind hilfreich.

Aufgabe 8 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit einer entsprechend der Skizze zwischen 0 und 2 linear fallenden Wahrscheinlichkeitsdichte f.



a) Wie groß ist $p_0 = P(X > 1)$?

b) Es wird zweimal hintereinander unabhängig eine Zufallszahl entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wert davon größer als 1 ist?

c) Aus X kann man eine neue Zufallsvariable $Y = 2X$ konstruieren, indem man die Ziehungsergebnisse jeweils verdoppelt. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte g zu Y.

Aufgabe 9 $(4 + 2 = 6$ Punkte)

In einem Geschäft wurde der zeitliche Abstand des Eintreffens von Kunden gemessen mit den Ergebnissen

23s, 42s, 15s, 7s, 18s.

a) Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{x}$ und die Standardabweichung s der Stichprobe.

b) Die Zeiten sollen als exponential-verteilt modelliert werden. Schlagen Sie dazu einen sinnvollen Parameter λ vor (mit Begründung)!