

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Name)

(Vorname)

(Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

06.07.2023

Prof. Georg Hoever

Klausur zum Fach Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 17.07. statt.

Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 20./21.07. statt.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 9 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ ₀	Bon.	Σ
Max	8	7	8	14	8	12	8	10	12	87	4	91

Note:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Die Folge a_n , $n \in \mathbb{N}_0$, sei definiert durch

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = 4a_n - 3.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_n = 3 \cdot 4^n + 1.$$

Aufgabe 2 ($2 + 1 + 4 = 7$ Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{Z}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Relation

$$R = \{(1, 4), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (4, 5)\}$$

gegeben.

- a) Welche Relationspaare muss man mindestens hinzufügen, damit die Relation transitiv wird?

(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

- b) Welche Relationspaare muss man mindestens hinzufügen, damit die Relation reflexiv wird?

(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

- c) Welche Relationspaare muss man hinzufügen, damit eine Relation entsteht, die weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist?

Begründen Sie zu Ihrer Angabe, warum die entstehende Relation weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist!

Aufgabe 3 (8 Punkte)

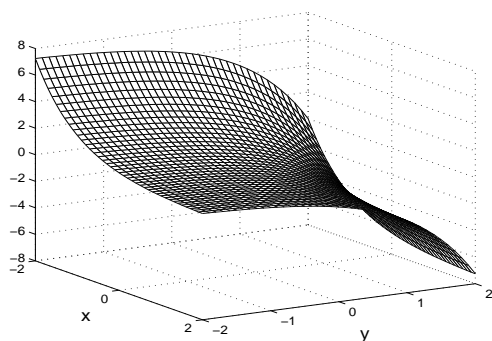
Die in den Bildern dargestellten Funktionen haben jeweils die Funktionsvorschrift

$$f(x, y) = a \cdot e^{bx} + c \cdot e^{dy}$$

mit speziellen $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}$.

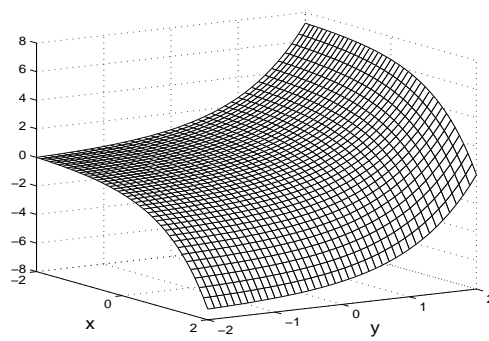
Geben Sie die konkreten Funktionsvorschriften zu den Bildern an.

a)



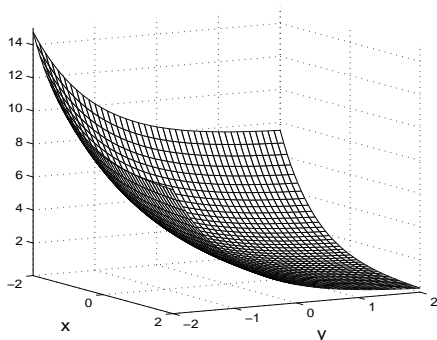
$$f(x, y) =$$

b)



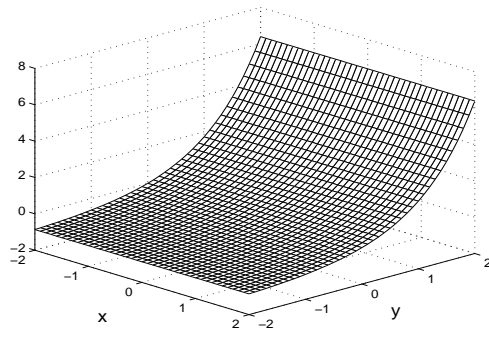
$$f(x, y) =$$

c)



$$f(x, y) =$$

d)



$$f(x, y) =$$

Aufgabe 4 (9 + 5 = 14 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 y^2 \\ 2x^3 + y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Führen Sie ausgehend von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von f aus.
- b) Welche Näherung für die Jakobimatrix an der Stelle $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhält man durch eine numerische Berechnung wie im Praktikum mit $h = 0.1$?

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_D x^2 z \cdot e^{xyz} \, d(x, y, z)$$

über den Bereich

$$D = [0, 3] \times [0, 1] \times [0, 2].$$

(Tipp: Nutzen Sie eine geschickte Integrationsreihenfolge!)

Aufgabe 6 (8 + 4 = 12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Die beiden Funktionen $u(t)$ und $v(t)$, die die Populationsgröße bestimmter Spezies U bzw. V angeben, erfüllen das Differenzialgleichungssystem

$$u' = 5 - v$$

$$v' = u \cdot v.$$

(Dabei wird davon ausgegangen, dass $u(t) \geq 0$ und $v(t) \geq 0$ ist.)

- a) Kreuzen Sie die richtigen Zusammenhänge (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) in der folgenden Tabelle an.

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

U vermehrt sich mehr,	je größer U ist.		U vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	
	unabh. von U .			unabh. von V .	
	Enthaltung			Enthaltung	
V vermehrt sich mehr,	je größer U ist.		V vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	
	unabh. von U .			unabh. von V .	
	Enthaltung			Enthaltung	

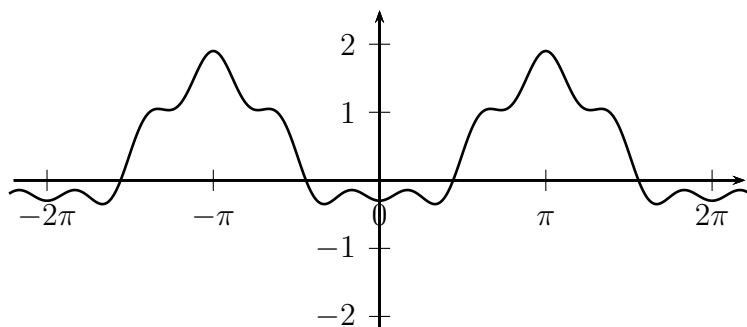
- b) Führen Sie zu der Anfangssituation $u(0) = 2$ und $v(0) = 3$ einen Schritt des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.1$ durch.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Für die Fourierkoeffizienten der dargestellten 2π -periodischen Funktionen gilt

- $a_0 \in \{-1, 0, 1\}$,
- einer der Fourierkoeffizienten a_1, b_1, a_2, b_2 ist gleich $+1$ oder -1 , die anderen drei sind gleich Null,
- die weiteren Koeffizienten sind irgendwelche betragsmäßig kleine reelle Zahlen.

Geben Sie die richtigen Werte für a_0, a_1, b_1, a_2 und b_2 an.



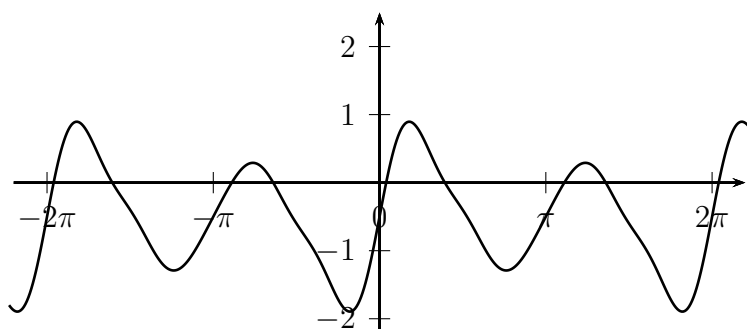
$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$b_1 =$$

$$a_2 =$$

$$b_2 =$$



$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$b_1 =$$

$$a_2 =$$

$$b_2 =$$

Aufgabe 8 ($5 + 5 = 10$ Punkte)

Eine Urne enthält n Kugeln ($n > 2$), von denen zwei schwarz und der Rest weiß sind.

Aus der Urne werden nun der Reihe nach Kugeln gezogen,

- 1) wobei die gezogene Kugel nach der Ziehung wieder in die Urne gelegt wird,
- 2) wobei die gezogene Kugel nach der Ziehung NICHT wieder in die Urne gelegt wird.

a) Sei konkret $n = 20$.

Wie wahrscheinlich ist bei 1) bzw. bei 2), dass genau bei der sechsten Ziehung zum ersten mal eine schwarze Kugel gezogen wird?

b) Geben Sie für allgemeines n eine Formel für die Wahrscheinlichkeit bei 1) bzw. bei 2) an, dass genau bei der r -ten Ziehung zum ersten mal eine schwarze Kugel gezogen wird.

Hinweis zu 2): Hier kann $r \leq n - 2$ angenommen werden.

Tipp zu 2): Bei der r -ten Ziehung sind noch $n - r + 1$ Kugeln in der Urne.

Aufgabe 9 (2 + 6 + 4 = 12 Punkte, davon bis zu 3 Enthaltungspunkte)

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu = 2$ und $\sigma = 0.5$.

- a) Zeichnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten f_X und f_Y in ein (gemeinsames) Koordinatensystem.
- b) Geben Sie in der folgenden Tabelle an, ob der linke Ausdruck $<$, $=$ oder $>$ dem rechten Ausdruck ist, oder tragen Sie „E“ für Enthaltung ein.

Jeder richtig Eintrag zählt 1 Punkt, eine Enthaltung 0.5 Punkte; Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	$<, =, >$ oder „E“	
$P(X \in [-1, 1])$		$P(X \in [0, 2])$
$P(Y \in [-1, 1])$		$P(Y \in [0, 2])$
$P(X \in [1, 2])$		$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [0, 1])$		$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [0, 2])$		$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [2, \infty[)$		$P(Y \in] - \infty, 1]$

- c) Geben Sie jeweils ein x_0 und ein y_0 an mit

$$P(X \leq x_0) = 0.8 \quad \text{und} \quad P(Y \leq y_0) = 0.8.$$