FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

14.09.2022

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 8 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ_0	Bon.	Σ
Max	10	6	10	16	12	13	10	16	93	4	97

Note:

Aufgabe 1 $(4 + 3 + 3 = 10$ Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{Z}_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist die Relation

$$R = \{(1,5), (2,4), (3,2), (4,1), (5,2), (5,6)\}$$

gegeben.

a) Geben Sie R^{2022} an.

b) Geben Sie eine Relation S auf $\mathbb{Z}_6$ an, so dass gilt

$$S \circ R = \{(1,4), (5,1)\}.$$

c) Begründen Sie, warum es keine Relation T auf $\mathbb{Z}_6$ gibt, so dass gilt

$$T \circ R = \{(3,1), (4,6)\}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 \cdot y^3 \cdot z^4$.

Berechnen Sie den Gradienten zu f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, -1)$ näherungsweise, indem Sie jeweils numerische Ableitungen nutzen, d.h. entsprechende Differenzenquotienten, mit $h = 0.1$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ziel ist die Bestimmung des an den Punkt $\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ nächstgelegenen Punktes Q auf der Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

in der folgenden Weise:

Bestimmen Sie den Abstand $d(\lambda, \mu)$ eines beliebigen Punktes der Ebene E zu $\vec{p}$ und suchen Sie eine Minimalstelle dieser Funktion.

Aufgabe 4 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Betrachtet werden die folgenden beiden möglichen Symmetrie-Eigenschaften:

(1) $f(x,-y) = f(x,y)$,

(2) $f(x,-y) = -f(x,y)$.

Welche der folgenden Aussagen sind bei den entsprechenden Symmetrie-Eigenschaften richtig bzw. falsch?

Kreuzen Sie den richtigen Eintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	falls (1) gilt			falls (2) gilt		
	richtig	falsch	Enth.	richtig	falsch	Enth.
$\int_{[0,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$						
$\int_{[-1,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$						
$\int_{[0,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 2\cdot\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$						
$\int_{[-1,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{[0,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$						

Aufgabe 5 ($8 + 4 = 12$ Punkte)

Betrachtet wird das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= x \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(1) = 2, \qquad y_2(1) = 0.$$

a) Berechnen Sie von $x = 1$ ausgehend mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.1$ eine Näherung für $y_1(1.2)$ und $y_2(1.2)$.

b) Berechnen Sie von $x = 1$ ausgehend einen Schritt des Heun-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.1$.

Aufgabe 6 $(8 + 2 + 3 = 13$ Punkte)

Auf dem Intervall $[-\pi; \pi]$ bzw. 2π-periodisch fortgesetzt sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_n und b_n der Fourierreihe zu f.

Tipp: Skizzieren Sie f und nutzen Sie Symmetrieüberlegungen!

b) Wie beginnt konkret die Fourierreihe? Notieren Sie dazu die Summanden bis $n \leq 3$.

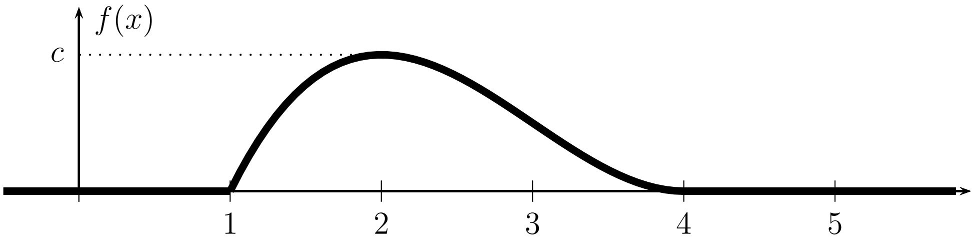
c) Welchen Wert hat die Fourierreihe

c1) an der Stelle $x = \dfrac{\pi}{4}$, c2) an der Stelle $x = \dfrac{\pi}{2}$?

(Hinweis: Diese Teilaufgabe können Sie auch ohne Bearbeitung von a) und b) lösen.)

Aufgabe 7 (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable, die Werte im Intervall $[1;4]$ annimmt, und die die im Bild skizzierte Dichte $f(x)$ (mit Maximalwert c an der Stelle 2) besitzt.



Markieren Sie den jeweils richtigen (gerundeten) Zahlenwert für die angegebenen Größen (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt).

Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

c	
0.25	
0.59	
1	
1.33	
Enth.	

$P(X < 2)$	
0.4	
0.5	
0.6	
1	
Enth.	

$P(X = 2)$	
0	
c	
0.5	
1	
Enth.	

E(X)	
2	
2.2	
2.5	
2.7	
Enth.	

Std.abw. von X	
0.1	
0.6	
1.8	
2	
Enth.	

Aufgabe 8 $(4 + 4 + 4 + 4 = 16$ Punkte)

Ein Zufallsexperiment X hat als Ergebnis die Werte 1, 2 oder 3 mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = 1) \;=\; 0.5, \qquad P(X = 2) \;=\; 0.2, \qquad P(X = 3) \;=\; 0.3.$$

a) Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung von X?

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal hintereinander durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Ergebnisse gleich 4 ist?

c) Es werden so lange Zufallsexperimente durchgeführt, bis zum ersten Mal 1 als Ergebnis kommt. Wie wahrscheinlich ist, dass dazu höchstens drei Versuche nötig sind?

d) Das Zufallsexperiment wird sechs mal hintereinander durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau zwei mal das Ergebnis gleich 3 ist?