FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

(Name)	(Vorname)	(Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

14.03.2022

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Formelblätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 8 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Bon.	Σ
Max	12	12	12	8	12	10	10	8	4	84+4

Note:

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ wird wie folgt eine Relation R definiert:

$$z_1 R z_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{>0} : z_1 = \alpha \cdot z_2.$$

a) Ist R eine Äquivalenzrelation?

b) Ist R eine Ordnungsrelation?

Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

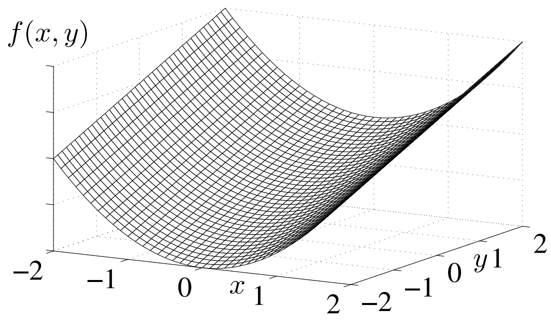
Welche Funktion erzeugt das nebenstehende „Funktionsgebirge“?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

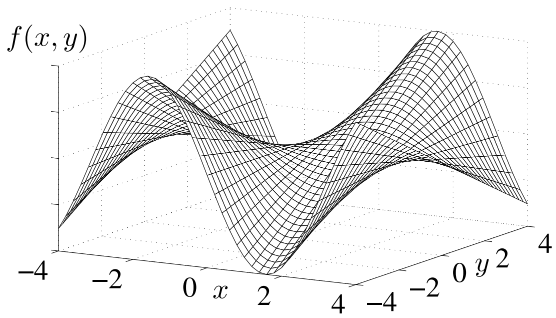
a)

$f(x,y) = x^2 + y$	
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	
$f(x,y) = x + y^2$	
$f(x,y) = x \cdot y^2$	
Enthaltung	



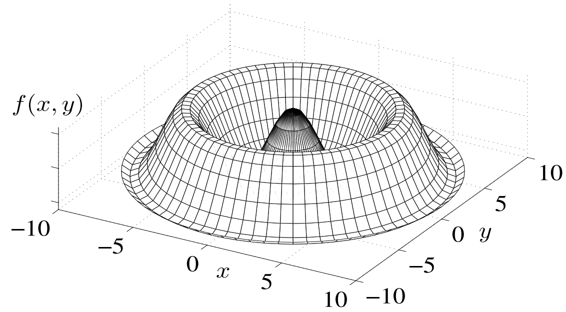
b)

$f(x,y) = \sin(x) + y$	
$f(x,y) = \sin(x) \cdot y$	
$f(x,y) = x + \sin(y)$	
$f(x,y) = x \cdot \sin y$	
Enthaltung	



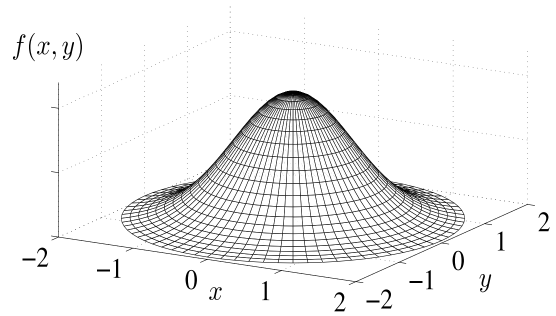
c)

$f(x,y) = \cos(x+y)$	
$f(x,y) = \cos(xy)$	
$f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}$	
$f(x,y) = \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y}$	
Enthaltung	



d)

$f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-y^2}}$	
$f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x+y)}$	
$f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$	
$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2}$	
Enthaltung	



Aufgabe 3 $(3+3+3+3=12$ Punkte)

Betrachtet wird das Gradientenverfahrens zur *Minimierung* der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y) \;=\; 3x^2+3y^2.$$

a) Führen Sie ausgehend von dem Startpunkt $(3,5)$ einen Schritt des Gradientenverfahrens zur Schrittweite 0.1 aus.

b) Zu welchem Punkt (x_1,y_1) führt ein Schritt des Gradientenverfahrens ausgehend von dem (allgemein gegebenen) Punkt (x_0,y_0) bei einer Schrittweite λ?

c) Zu welchem Punkt (x_2,y_2) (in Abhängigkeit von (x_0,y_0) und λ) führt ein weiterer Schritt des Gradientenverfahrens mit gleicher Schrittweite λ?

d) Die Antworten auf die folgenden beiden Fragen brauchen Sie nicht begründen.

   d1) Welchen Punkt (x_n,y_n) erhält man nach n Schritten des Gradientenverfahrens ausgehend von dem (allgemein gegebenen) Punkt (x_0,y_0) bei fester Schrittweite λ?

   d2) Für welche Werte von λ konvergiert das Gradientenverfahrens bei fester Schrittweite λ gegen die Minimalstelle $(0,0)$?

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $c > 0$

$$\int\limits_{[0,1]\times[0,2]} \frac{y}{(c+xy)^2}\,\mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$y'' = y^2 + x^2 \cdot y', \qquad y(3) = 2,\ y'(3) = -1.$$

Transformieren Sie die Differenzialgleichung in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung und führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 0.1 durch.

Aufgabe 6 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Die *reellen* Fourier-Koeffizienten zur diskreten Fourier-Transformation zu vier Datenpunkte $f_0, \dots, f_3$ seien

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = -3, \quad b_1 = 2.$$

Wie lauten die *komplexen* Fourier-Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 zu den Datenpunkten?

b) Die komplexe diskrete Fourier-Transformation von 100 Datenpunkten f_n zu den c_n, $n = 0, \dots, 99$, kann als Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{99} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{99} \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $C = (c_{i,j})_{0 \le i,j \le 99}$ dargestellt werden.

Geben Sie den Koeffizienten $c_{10,13}$ der Matrix C in der Form „Realteil+Imaginärteil·j“ an.

Aufgabe 7 (4 + 6 = 10 Punkte)

Ein Zufallsexperiment X hat als Ergebnis die Werte 1, 3 oder 5 mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = 1) = 0.3, \qquad P(X = 3) = 0.1, \qquad P(X = 5) = 0.6.$$

a) Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung von X?

b) Es werden so lange Zufallsexperimente durchgeführt, bis zum ersten Mal 1 als Ergebnis kommt. Wie wahrscheinlich ist, dass dazu höchstens drei Versuche nötig sind?

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Mit $P_{\mu,\sigma}(\,]a,b[\,)$ wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ einen Wert im Intervall $]a,b[$ annimmt.

Geben Sie in der folgenden Tabelle den jeweils fehlenden Wert so an, dass $P_{\mu,\sigma}(\,]a,b[\,)$ gleich der links dargestellten Wahrscheinlichkeit ist.

	μ	σ	a	b
$P_{3,2}(\,]3,7[\,)$	0	1	0	
$P_{0,1}(\,]-1,2[\,)$	3	2		7
$P_{-1,2}(\,]-1,3[\,)$	0		0	6
$P_{0,1}(\,]2,\infty[\,)$		2	$-\infty$	2