
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

24.09.2021

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Formelblätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 8 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ_0	Bon.	Σ
Max	18	20	12	10	7	11	6	12	96	4	100

Note:

Aufgabe 1 ($2 + 2 + 2 + 6 \cdot 2 = 18$ Punkte)

Sei $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ und Σ^* alle aus den Ziffern 1,2,3 und 4 bildbaren Zahlen inklusive der „leeren“ Zahl „“. Auf Σ^* sei durch die folgende Angabe eine Relation R definiert:

$w \in \Sigma^*$ steht in Relation zu $1w4$ und $2w3$.

Gültige Zahlen seien „“ und alle $w \in \Sigma^*$ mit „“$R^+ w$.

a) Geben Sie vier verschiedene gültige Zahlen ungleich „“ an:

b) Wieviele verschiedene zehn-stellige gültige Zahlen gibt es?

c) Geben Sie w_1, $w_2 \in \Sigma^*$ an mit

$$w_1 \; R^2 \; 12123434 \qquad \text{und} \qquad 2233 \; R^3 \; w_2, \text{ wobei } w_2 \text{ mit 212 beginnt.}$$

$w_1 =$ $\qquad\qquad$ $w_2 =$

d) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob jeweils die Aussage stimmt oder nicht.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
Jede gültige Zahl besitzt genauso viele 1en wie 2en.			
Jede gültige Zahl besitzt genauso viele 2en wie 3en.			
Jede Zahl $w \in \Sigma^*$, die genauso viele 2en wie 3en und genauso viele 1en wie 4en besitzt, ist gültig.			
Jede Zahl, die aus n 1en gefolgt von n 2en gefolgt von n 3en gefolgt von n 4en besteht, ist gültig.			
Jede gültige Zahl hat eine durch 5 teilbare Quersumme.			
Jede Zahl $w \in \Sigma^*$, deren Quersumme durch 5 teilbar ist, ist gültig.			

Aufgabe 2 ($10 \cdot 2 = 20$ Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle (bzgl. des Ursprungs) rotationssymmetrischen differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
$f(0,0) = 0$			
$f(2,1) = f(1,2)$			
$f(1,1) = f(2,0)$			
$f(3,4) = f(5,0)$			
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0) = 0$.			
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, 0) = 0$.			
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.			
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ steht $\operatorname{grad} f(\vec{x})$, senkrecht auf $\vec{x}$.			
Für den Kreis K_1 um den Ursprung mit Radius 1 gilt $\int_{K_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$.			
Für $D_1 = [0,1] \times [0,1]$ und $D_2 = [-1,0] \times [0,1]$ gilt $\int_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.			

Aufgabe 3 (4 + 8 = 12 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) \;=\; \begin{pmatrix} x + z^2 - 2 \\ x \cdot \mathrm{e}^{xy} + 1 \\ x^2 \cdot z + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Jakobimatrix J_f zu f an.

b) Führen Sie ausgehend von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Schritt des mehrdimensionalen Newtonverfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von f aus.

Aufgabe 4 $(2 + 8 = 10$ Punkte$)$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) \;=\; x^2.$$

a) Drücken Sie f in Polarkoordinaten aus.

b) Bestimmen Sie $\int\limits_{K_2} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)$, wobei K_2 der Kreis mit Radius 2 um den Ursprung ist.

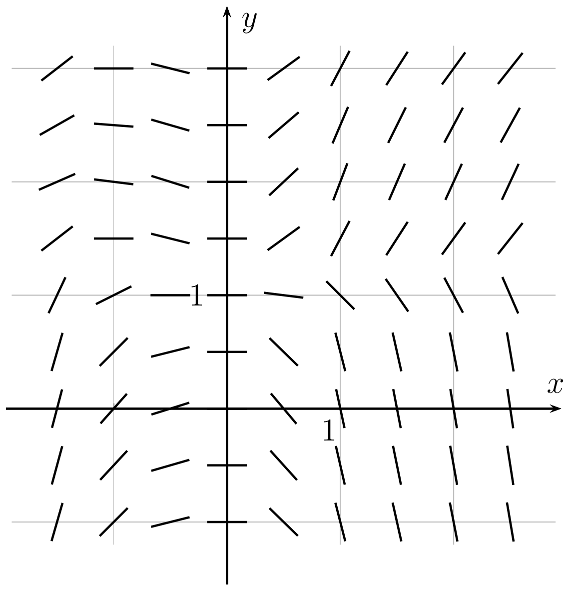
Aufgabe 5 $(2 + 2 + 3 = 7$ Punkte$)$

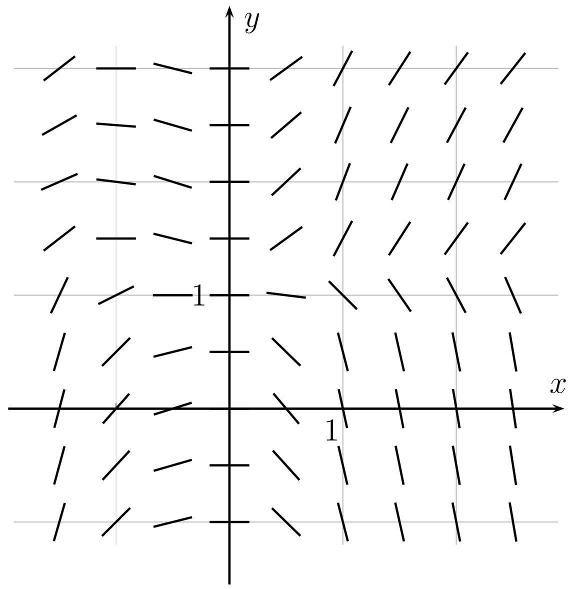
Gegeben ist das abgebildete Richtungsfeld zu einer Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$.

Gesucht sind approximative Lösungsverläufe zur Anfangsbedingung $y(-1) = 0.5$.

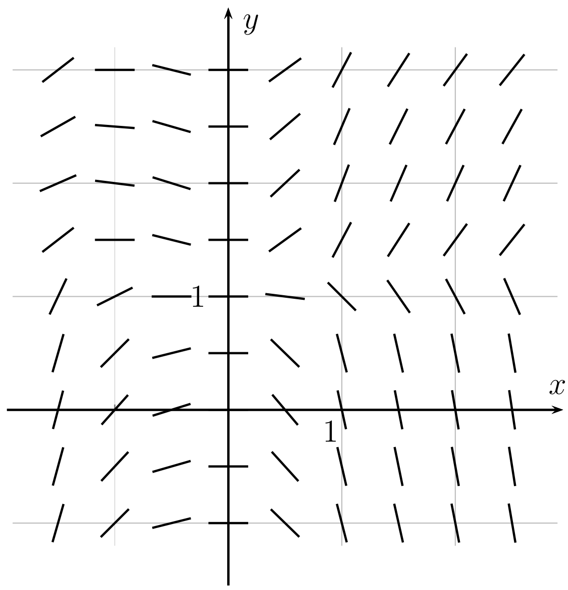
a1) Zeichnen Sie in das linke Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch vier Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 0.5 erhält.

a2) Zeichnen Sie in das rechte Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch drei Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 1 erhält.





b) Zeichnen Sie in das folgende Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch zwei Schritte des Heun-Verfahrens zur Schrittweite 1 erhält.

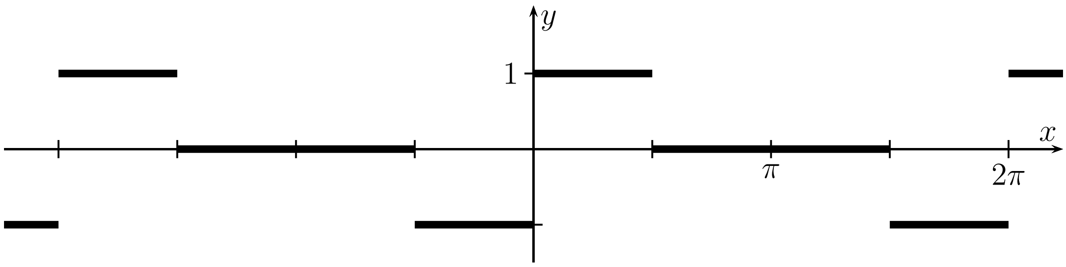


Aufgabe 6 (11 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in]0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & , \text{ falls } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \\ -1 & , \text{ falls } x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

(s. Skizze).



Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n und geben Sie den Beginn der Fourierreihe zu f bis (inklusive) $n = 5$ an.

(Tipp: Nutzen Sie Symmetrieüberlegungen!)

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Max hat acht Bausteine, die er zu einem Turm stapeln will:

- vier blaue Steine
- drei gelbe Steine
- einen roten Stein

Wieviel farblich verschiedene Türme kann er damit bauen? (Es sollen jeweils alle Steine aufeinander gestapelt werden.)

Aufgabe 8 $(3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte)

Die Zufallsvariable X besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{c}{x^3} & \text{, falls } x \geq 1, \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

a) Welchen Wert hat c, damit f tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in $[2; 3]$?

c) Für welchen Wert $x_{0,5}$ gilt, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, kleiner als $x_{0,5}$ zu sein, gleich 0,5 ist?

d) Wie groß ist der Erwartungswert von X?

Hinweis: Wenn Sie bei a) für c kein Ergebnis herausbekommen haben, können Sie bei b) bis d) c als Parameter nutzen.