

Aufgabe 1

a) $f(x, y) = \sin(x) + x \cdot \sin(y) + \frac{1}{2}x^2y^2 + y^2$

b) Es ist grad $f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f \right)$.

Nach dem Satz von Schwarz ist $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$.

Hier ist $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot e^{xy}) = x^2 \cdot e^{xy}$
 $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy} \cdot y^2) = y^2 \cdot e^{xy}$ //

Aufgabe 2

a) $(1, 1, 0)$ entspricht $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

b) $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta$

$$= 2r \sin \vartheta \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \cdot r^2 \cos \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta$$
$$= 2r \sin \vartheta \vec{e}_r + r \cos \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta$$

c) In lokalen kugel-h0 ist

$$\text{grad } f = \underset{=1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2}} \cdot \vec{e}_r + \underset{=0}{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}} \cdot \vec{e}_\vartheta$$

$$= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \vec{e}_r$$

In kart. h0 ist das $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

$$\int \cos(x^2 + y^2 + c) d(x, y)$$

$$\stackrel{k_2}{=} \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(r^2 + c) r d\varphi dr$$

$$= \int_{r=0}^2 2\pi \cdot \cos(r^2 + c) r dr$$

$$= \pi \cdot \sin(r^2 + c) \Big|_0^2$$

$$= \pi \cdot (\sin(4 + c) - \sin(c))$$

Aufgabe 4 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei

A die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung,

$\vec{r}$ ein Weg, der ausgehend von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Einheitskreis in der (x, y) -Ebene umrandet.

Gelten bzgl. dieser Fläche A bzw. dieses Weges $\vec{r}$ die folgenden Aussagen für alle „braven“ Vektorfelder

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}?$$

Kreuzen Sie die richtige Antwort (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.

		gilt	gilt nicht	Enth.
Wenn überall $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F} \, d\vec{A} = 0$	X		
	$\int \vec{F} \, d\vec{r} = 0$		X	
Wenn überall $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F} \, d\vec{A} = 0$		X	
	$\int \vec{F} \, d\vec{r} = 0$	X		
Wenn $\vec{F}$ in Kugelkoordinaten nur eine radiale Komponente hat, also $\vec{F} = F(r, \phi, \vartheta) \cdot \vec{e}_r$, so ist	$\iint \vec{F} \, d\vec{A} = 0$		X	
	$\int \vec{F} \, d\vec{r} = 0$	X		

Aufgabe 5

$$\begin{aligned} y'(1) &= y(1) \cdot 1 + 1 \\ &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(1,1) &\approx y(1) + 0,1 \cdot y'(1) \\ &= 2 + 0,1 \cdot 3 = 2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(1,1) &= y(1,1) \cdot 1,1 + 1,1 \\ &= 2,3 \cdot 1,1 + 1,1 = 3,63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(1,2) &\approx y(1,1) + 0,1 \cdot y'(1,1) \\ &\approx 2,3 + 0,1 \cdot 3,63 = 2,663 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(1,2) &= y(1,2) \cdot 1,2 + 1,2 \\ &\approx 2,663 \cdot 1,2 + 1,2 = 4,3956 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(1,3) &\approx y(1,2) + 0,1 \cdot y'(1,2) \\ &\approx 2,663 + 0,1 \cdot 4,3956 = 3,10256 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Das char. Pol. ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ mit Nullstellen -1 und 3

$\Rightarrow$ die allg. Lsg. ist

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

b) Es ist $y'(t) = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t}$

$$\text{also: } 3 = y(0) = c_1 + c_2 \quad \text{I}$$

$$1 = y'(0) = -c_1 + 3c_2 \quad \text{II}$$

$$\text{I+II: } 4 = 4c_2 \Rightarrow c_2 = 1, \text{ aus I dann } c_1 = 2$$

$$\Rightarrow y(t) = 2e^{-t} + e^{3t}$$

Aufgabe 7 (10 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Betrachtet wird eine 2π -periodische Funktion f sowie ihre Fourierreihe mit den üblichen Fourierkoeffizienten a_0 , a_n und b_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kreuzen Sie in den Spalten der folgenden Tabellen jeweils die richtige Antwortmöglichkeit oder „Enthaltung“ an.

Bei a) zählt die richtige Antwort 2 Punkte und „Enthaltung“ 1 Punkt; bei b) und c) zählt die richtige Antwort 1,5 Punkte und „Enthaltung“ 0,5 Punkte.

a)

	Wenn $a_0 < 0$ ist, so ist f überall negativ.	Wenn f überall negativ ist, so ist $a_0 < 0$.
Stimmt.		✓
Stimmt nicht.	✓	
Enthaltung		

b)

	Wenn f gerade ist,	Wenn f ungerade ist,
so sind alle a_n und b_n mit geradem n gleich 0		
so sind alle a_n und b_n mit ungeradem n gleich 0		
so sind alle a_n gleich 0		✓
so sind alle b_n gleich 0	✓	
Enthaltung		

c)

	Wenn f konstant ist,	Wenn $f(x) = \sin(x+1)$ ist,
so sind alle a_n und b_n gleich 0	außer a_0	✓
	außer a_1	
	außer b_1	
	außer a_1 und b_1	✓
	Enthaltung	

Aufgabe 8

a) Es ist $\sin(3t) \longleftrightarrow \frac{3}{s^2 + 3^2} = \frac{3}{s^2 + 9}$

Dämpfungs-

=>

Satz

$$e^{-2t} \sin(3t) \longleftrightarrow \frac{3}{(s+2)^2 + 9}$$

b) $s^2 - 6s + 5$ besitzt die Null 1 und 5.

Ansatz zur Partialbruch-Zerlegung:

$$\frac{1}{s^2 - 6s + 5} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5} = \frac{A(s-5) + B(s-1)}{(s-5) \cdot (s-1)}$$

Einsetzen von $s=5$ in Zähler: $1 = B \cdot 4 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$s=1$ $1 = A \cdot (-4) \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2 - 6s + 5} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-5}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ -\frac{1}{4} \cdot e^t + \frac{1}{4} e^{5t} \end{array}$$

Aufgabe 9

$$a) P(\text{Tor in } [0, 30 \text{ min}]) = \int_0^{30 \text{ min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt$$

$$= -e^{-\lambda t} \Big|_0^{30 \text{ min}} = -e^{-0,04 \cdot 30} + e^0 = 1 - e^{-1,2} \approx 0,6988$$

$$b) 0,6 = \int_0^{45 \text{ min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^{45 \text{ min}} = -e^{-\lambda \cdot 45 \text{ min}} + 1$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda \cdot 45 \text{ min}} = 0,4 \Rightarrow -\lambda \cdot 45 \text{ min} = \ln(0,4)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,4)}{45} \text{ min}^{-1} \approx 0,02 \text{ min}^{-1}$$

$$c) 30 \text{ min} = E(x) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{30} \text{ min}^{-1} \approx 0,033 \text{ min}^{-1}$$

$$d) P(\text{Mannschaft 1 mindestens 1 Tor und M. 2 kein Tor})$$

$$= P(X_1 \in [0, 90 \text{ min}]) \cdot (1 - P(X_2 \in [0, 90 \text{ min}]))$$

$$= \int_0^{90 \text{ min}} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} dt \cdot \left(1 - \int_0^{90 \text{ min}} \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 t} dt \right)$$

$$= -e^{-\lambda_1 t} \Big|_0^{90 \text{ min}} \cdot \left(1 - \left(-e^{-\lambda_2 t} \Big|_0^{90 \text{ min}} \right) \right)$$

$$= \left(-e^{-0,01 \cdot 90} + 1 \right) \cdot \left(1 - \left(-e^{-0,02 \cdot 90} + 1 \right) \right)$$

$$= \left(1 - e^{-0,9} \right) \cdot e^{-1,8}$$

$$\approx 0,098$$

e) Beim größeren λ ist $E(x)$ kleiner, d.h. es passiert im Durchschnitt eher etwas, also mehr Tore.

$\Rightarrow$ die Mannschaft mit größerem λ hat größere Gewinnwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 10

$$\bar{x} = \frac{1}{9} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 15) = 4$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{9} (4 \cdot (1-4)^2 + 2 \cdot (3-4)^2 + 1 \cdot (5-4)^2 + 1 \cdot (6-4)^2 + 1 \cdot (15-4)^2) \\ &= \frac{1}{9} (4 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 121) \\ &= \frac{164}{9} = 20,5 \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{20,5} \approx 4,528$$

$$\text{Median} = 3$$