Aufgabe 1 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Für welche in der Tabelle unten aufgeführten Paramterwerte ergibt die Menge der

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

eine Halbkugel?

Kreuzen Sie die richtige Antwort (3 Punkte) oder Enthaltung (1,5 Punkte) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	ist Halbkugel	ist keine Halbkugel	Enthaltung
$r \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$	X		
$r \in [0,1]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$		X	
$r \in [0,1]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	X		
$r \in [-1,1]$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$		X	

Aufgabe 2

a) Gesucht ist eine Nullstelle von

$$g(x,y) = f(x,y) - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(xy) - x - 2 \\ x^2 - y + 3 \end{pmatrix}$$

Es ist $g'(x,y) = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(xy) - 1 & x \cdot \cos(xy) \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

Für einen Newton-Schritt sucht man $(\Delta x, \Delta y)$ mit

$$g'(1,0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -g(1,0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{LGS} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +2 \cdot I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -II \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \text{ also } \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $f(0{,}9; 0{,}1) = f(1 - 0{,}1; 0 + 0{,}1) \approx f(1,0) + f'(1,0) \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

Dabei ist $f'(x,y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) - 1 & x \cdot \cos(xy) \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

also $f(0{,}9; 0{,}1) \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$\int_D (x+y)\cdot\cos(xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_D x\cdot\cos(xy)\, d(x,y) + \int_D y\cdot\cos(xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^{1/2}\int_{y=0}^{\pi} x\cdot\cos(xy)\, dy\, dx + \int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{1/2} y\cdot\cos(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{\pi} dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(xy)\Big|_{x=0}^{1/2} dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(\pi x)\, dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}y)\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^{1/2} + \left(-2\cdot\cos(\tfrac{1}{2}y)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\big(\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} - 1\big) - 2\cdot\big(\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} - 1\big)$$

$$= \frac{1}{\pi} + 2$$

Aufgabe 4

Da $\vec{F}$ wirbelfrei ist, gibt es ein Potenzial φ mit $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$.

Offensichtlich ist $\varphi(x,y,z) = xz + \frac{1}{3}y^3$ ein solches Potenzial.

Damit gilt

$$\int \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(4,3,5) - \varphi(0,0,0)$$
$$= 4 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 20 + 9 = 29$$

Aufgabe 5

Sei $y_0 = y$ $\quad y_0' = y' = y_1$

$y_1 = y'$ $\quad \Rightarrow \quad y_1' = y'' = x^2 + y'y\,x$

$= x^2 + y_1 \cdot y_0 \cdot x$

Die AB werden zu $y_0(1) = y(1) = 2$

$y_1(1) = y'(1) = 3$

1. Schritt:

$y_0(1{,}1) \approx y_0(1) + 0{,}1 \cdot y_0'(1) = \overset{=2}{y_0(1)} + 0{,}1 \cdot \overset{=3}{y_1(1)} = 2{,}3$

$y_1(1{,}1) \approx y_1(1) + 0{,}1 \cdot y_1'(1) = y_1(1) + 0{,}1 \cdot (1^2 + y_1(1) \cdot y_0(1) \cdot 1)$

$= 3 + 0{,}1 \cdot (1 + 3 \cdot 2 \cdot 1)$

$= 3{,}7$

2. Schritt (reicht für y_0):

$y_0(1{,}2) \approx y_0(1{,}1) + 0{,}1 \cdot y_0'(1{,}1)$

$\approx 2{,}3 + 0{,}1 \cdot y_1(1{,}1)$

$\approx 2{,}3 + 0{,}1 \cdot 3{,}7$

$= 2{,}67$

$\Rightarrow y(1{,}2) \approx 2{,}67$

Aufgabe 6

a) $f_1(t) = 3 \cdot f(t)$

$\Rightarrow F_1(\omega) = 3 \cdot F(\omega) = 3 \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

b) $f_2(t) = f(t+3) = f(t-(-3))$

$\Rightarrow F_2(\omega) = e^{-j \cdot \omega \cdot (-3)} \cdot F(\omega) = e^{+j\omega \cdot 3} \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

$= \sqrt{\pi} \cdot e^{3\omega j - \frac{\omega^2}{4}}$

c) $f_3(t) = f(\sqrt{3} \cdot t)$

$\Rightarrow F_3(\omega) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right)^2}{4}}$

$= \sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{12}}$

d) $f_4(t) = t \cdot f(t)$

$\Rightarrow F_4(\omega) = j \cdot F'(\omega) = j \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(-\frac{2\omega}{4}\right) \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

$= -\frac{1}{2} j \sqrt{\pi}\, \omega \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

Aufgabe 7

a) Zu $f(t) = t$ ist $F(s) = \frac{1}{s^2}$

$\Rightarrow$ zu $g(t) = t \cdot e^{-2t} = e^{-2t} f(t)$ ist

$$G(s) = F(s+2) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

b) $$F(s) = \frac{2s+1}{(s+2)^2+1} = \frac{2(s+2)-3}{(s+2)^2+1}$$

$$= 2 \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - 3 \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \qquad\qquad\qquad \bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$2 \cdot e^{-2t} \cos t \quad - 3 \cdot e^{-2t} \sin t$$

NR: $\sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$

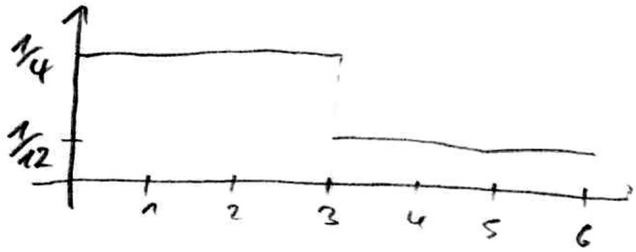
$\Rightarrow e^{-2t} \sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+2)^2+1}$

$\cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+1}$

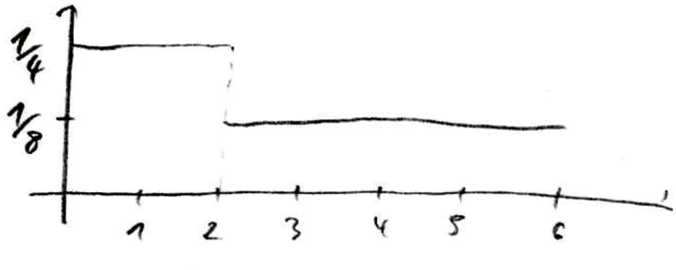
$\Rightarrow e^{-2t} \cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s+2}{(s+2)^2+1}$

Aufgabe 8

a)



b)



Aufgabe 9

a) Es muss $P(W2 > W1) > 0{,}5$ sein.

Tatsächlich gilt:

$$P(W2 > W1) = P((W2 = 1 \text{ und } W1 = 0) \text{ oder } (W2 = 3 \text{ und } W1 < 3) \text{ oder } (W2 = 5 \text{ und } W1 < 5))$$

$$= P(W2 = 1) \cdot P(W1 = 0) + P(W2 = 3) \cdot P(W1 < 3) + P(W2 = 5) \cdot P(W1 < 5)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1 + 6 + 15}{36} = \frac{22}{36} > \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

b) Ja, wenn man die 6 von Würfel 1 durch eine größere Zahl ersetzt, bleiben die W' von a) gleich, aber der Erwartungswert von Würfel 1 steigt.

Der Erwartungswert von Würfel 2 ist $\frac{22}{6}$.

Bei 0 2 2 4 4 c hat Würfel 1 einen Erwartungswert von $\frac{12+c}{6}$, d.h. für $c > 10$, z.B. $c = 11$ ist der Erwartungswert größer.

Aufgabe 10

$[1,5]$ ist für X der $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$ - Bereich

$\Rightarrow P(X \in [1;5]) = 0,683$

$$P(Y \in [1;5]) = \phi\left(\frac{5-2}{4}\right) - \phi\left(\frac{1-2}{4}\right)$$

$$= \phi(0,75) - \phi(-0,25)$$

$$= \phi(0,75) - (1 - \phi(0,25))$$

$$\approx 0,77337 - (1 - 0,59871)$$

$$= 0,37208$$