Aufgabe 1

Minimiert werden soll

$d(m,a) = (g(-1)-2)^2 + (g(0)-1)^2 + (g(3)-0)^2$

$(m\cdot(-1)+a-2)^2 + (m\cdot 0+a-1)^2 + (m\cdot 3+a-0)^2$

$= (-m+a-2)^2 + (a-1)^2 + (3m+a)^2$

Kandidaten für Extremstellen sind Nullstellen von grad d:

$(0,0) = \operatorname{grad} d(m,a)$

$= \big(-2(-m+a-2) + 3\cdot 2\cdot(3m+a),$

$\quad 2(-m+a-2) + 2(a-1) + 2(3m+a)\big)$

$= (20m + 4a + 4,\ 4m + 6a - 6)$

$\Leftrightarrow \quad 5m + a = -1$

$\quad 2m + 3a = 3 \qquad -3\cdot I$

$\Leftrightarrow \quad 5m + a = -1$

$\quad -13m = 6$

aus II: $m = -\frac{6}{13}$ in I: $a = -1-5m = -1 + \frac{30}{13} = \frac{17}{13}$

Als einzige Kandidat ist das die gesuchte Minstelle

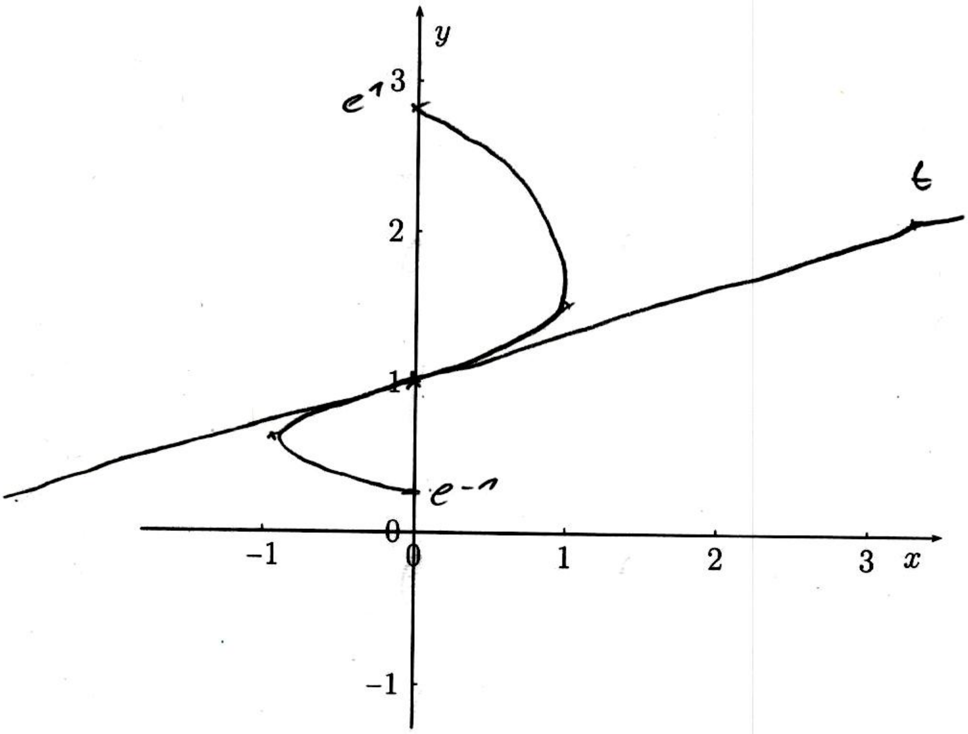
$\Rightarrow \quad g(x) = -\frac{6}{13}x + \frac{17}{13}$

Aufgabe 2 (3 + 4 = 7 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ e^t \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie f für $t \in [-1, 1]$ im Koordinatensystem.



b) Geben Sie eine Gleichung für die Tangente an die Kurve für $t = 0$ an, und zeichnen Sie die Tangente in das Koordinatensystem aus a) ein.

$$t(\lambda) = f(0) + \lambda \cdot f'(0) \quad \text{mit} \quad f'(t) = \begin{pmatrix} \pi \cdot \cos(\pi t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Sind die Integrale $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ zu den angegebenen Funktionen f und Integrationsbereichen D negativ, gleich Null oder positiv?

(K_R bezeichnet den Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Radius R um den Ursprung.)

Kreuzen Sie die richtige Antwort (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (E.) (1 Punkt) an!

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

Tipp: Versuchen Sie, sich den Integranden vorzustellen.

$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$		< 0	$= 0$	> 0	E.
$f(x,y) = x^2 y$	$D = [0,1] \times [-1,1]$		X		
	$D = [-1,1] \times [0,1]$			X	
	$D = K_1$		X		
f in Polarkoordinaten gegeben durch $f(r) = \sin(r)$	$D = K_\pi$			X	
	$D = K_{2\pi}$	X			
	$D = [0,1] \times [0,1]$			X	

Aufgabe 4

Es ist $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y) + \frac{\partial}{\partial y} \sin(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$

$$= 3x^2y + y$$

Nach dem Integralsatz von Gauss ist

$$\iint \vec{F}\, d\vec{A} = \iiint \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (3x^2y + y)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} 1 \cdot (3x^2y + y)\, dx\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{3}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} y^2\right)\Big|_{y=0}^{1}\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

Aufgabe 5

Dann ist $y_s(x) = \frac{1}{2}x^3$ eine spez. Lsg. der DGL,

und die allgemeine Lsg. ist

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

mit $y'(x) = \frac{3}{2}x^3 + c_1 + 2c_2 x$

Für die AB muss gelten:

$$2 = y(1) = \frac{1}{2} + c_1 + c_2$$
$$4 = y'(1) = \frac{3}{2} + c_1 + 2c_2$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 + c_2 = \frac{3}{2}$$
$$c_1 + 2c_2 = \frac{5}{2}$$

$\mathrm{II} - \mathrm{I}: \; c_2 = 1$

in I: $c_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + x^2$$

Aufgabe 6

Komplexifizierung:

$$y'' + 2y' + 10y = 5 \cdot e^{j \cdot 4t}$$ (später: Imaginärteil!)

Ansatz: $y(t) = c \cdot e^{j \cdot 4t}$

$$y'(t) = 4cj\, e^{j4t}$$

$$y''(t) = -16c\, e^{j \cdot 4t}$$

Einsetzen:

$$-16 \cdot c \cdot e^{j \cdot 4t} + 2 \cdot 4 \cdot cj \cdot e^{j \cdot 4t} + 10 c \cdot e^{j4t} = 5 \cdot e^{j \cdot 4t}$$

$$\Rightarrow \quad (-6+8j)\, c = 5$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{5}{-6+8j} = \frac{5 \cdot (-6-8j)}{36+64} = \frac{-30-40j}{100} = -\frac{3}{10} - \frac{4}{10} j$$

Reelle Lsg. ist also

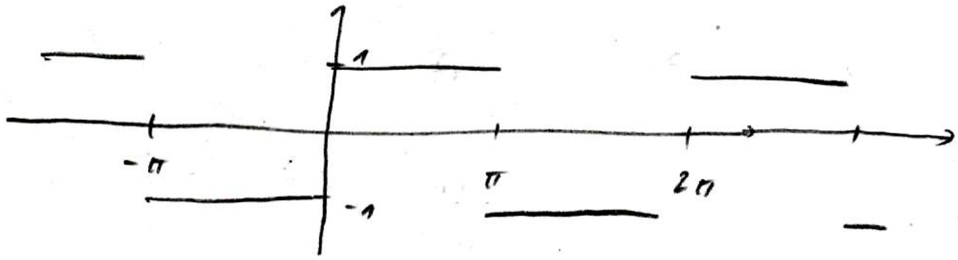
$$\operatorname{Im}\left(\left(-\frac{3}{10} - \frac{4}{10} j\right) \cdot e^{j \cdot 4t} \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{3}{10} - \frac{4}{10} j\right) \cdot \left(\cos(4t) + j \cdot \sin(4t)\right) \right)$$

$$= -\frac{4}{10} \cdot \cos(4t) - \frac{3}{10} \sin(4t)$$

Aufgabe 7

a)



b) f ist ungerade $\Rightarrow$ $a_n = 0$ für alle n.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \sin(nx)}_{\text{gerade}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n}\right) \cdot \cos(nx) \Big|_{0}^{\pi}$$

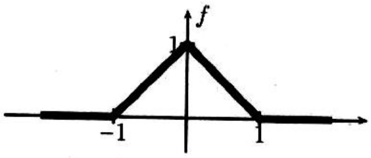
$$= -\frac{2}{\pi \cdot n} \cdot \left(\cos(n \cdot \pi) - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 8 (3 + 3 = 6 Punkte)

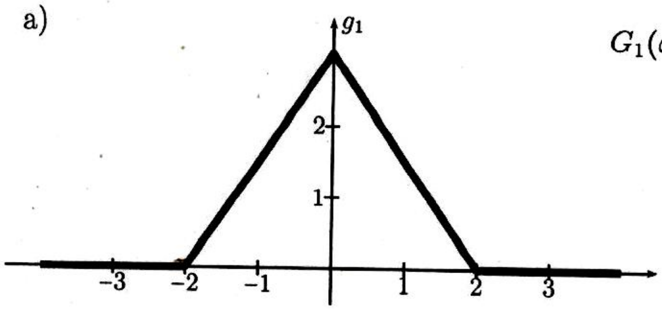
Die Fouriertransformation zu der abgebildeten Dreiecksfunktion f lautet

$$F(\omega) = 2 \cdot \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2}.$$



Geben Sie die Fouriertransformationen zu den wie folgt dargestellten Funktionen g_i an.

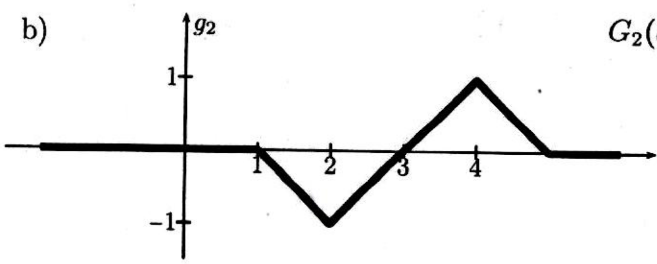
a)



$g_1(t) = 3 \cdot f\left(\frac{1}{2} t\right)$

$$G_1(\omega) = 3 \cdot 2 \cdot F(2\omega) = 6 \cdot 2 \cdot \frac{1 - \cos(2\omega)}{(2\omega)^2} = 3 \cdot \frac{1 - \cos(2\omega)}{\omega^2}$$

b)



$g_2(t) = - f(t-2) + f(t-4)$

$$G_2(\omega) = -e^{-j\omega \cdot 2} \cdot F(\omega) + e^{-j\omega \cdot 4} \cdot F(\omega) = \left(e^{-j\omega \cdot 4} - e^{-j\omega 2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2}$$

Aufgabe 9 (2 + 8 + 4 = 14 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Sei

X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und

Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 3$ und $\sigma = 2$.

a) Zeichnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten f_X und f_Y in ein (gemeinsames) Koordinatensystem.

b) Geben Sie in der folgenden Tabelle an, ob der linke Ausdruck <, = oder > dem rechten Ausdruck ist, oder tragen Sie „E" für Enthaltung ein.

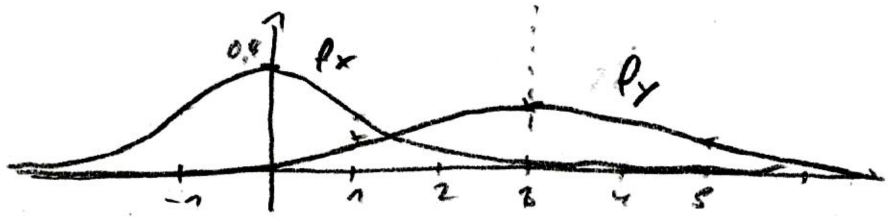
Jeder richtig Eintrag zählt 2 Punkte, eine Enthaltung 1 Punkt; Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	<, =, > oder „E"	
$P(Y \in [2,4])$	>	$P(Y \in [3,5])$
$P(Y \in [1,4])$	=	$P(Y \in [2,5])$
$P(X \in [0,3])$	>	$P(Y \in [0,3])$
$P(X \in [-3,\infty[)$	=	$P(Y \in [-3,\infty[$

c) Geben Sie jeweils ein x_0 und ein y_0 an mit

$$P(X \le x_0) = 0.9 \qquad \text{und} \qquad P(Y \le y_0) = 0.9.$$

a)



c) Aus Tabelle: $x_0 \approx 1{,}28$

$y_0 \approx 3 + 2 \cdot 1{,}28 = 5{,}56$

Aufgabe 10

Fälle: Erste 6

- beim 1. Mal : W: $1/6$, Gewinn 1 €
- beim 2. Mal : W = $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$, Gewinn 2 €
- beim 3. Mal : W = $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$, Gewinn 3 €

„fairer Einsatz" $= E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1€ + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2€ + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3€$

$$= \frac{36 + 60 + 75}{6^3} €$$

$$= \frac{171}{216} € \approx 0{,}8 €$$