Aufgabe 1

Die Stelle $(0,2,0)$ wird in Kugel-KO beschrieben durch

$r = 2, \ \varphi = \frac{\pi}{2}, \ \vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Damit ist

a) $\vec{F} = 2 \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \vec{e}_r + 2 \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \vec{e}_\varphi + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \vec{e}_\vartheta$

$= 2 \cdot \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\vartheta$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Es ist $\operatorname{grad} f(x,y) = (1 - e^{x+y^2} ; -1 - 2y e^{x+y^2})$

a) pot. Extremstellen = Nst. von grad f:

$(0,0) = \operatorname{grad} f(x,y)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 1 - e^{x+y^2}$ und $0 = -1 - 2y e^{x+y^2}$

$\Leftrightarrow \quad e^{x+y^2} = 1$ und $2y \cdot e^{x+y^2} = -1$

$\Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$x + y^2 = 0$

$x + \frac{1}{4} = \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Einzige pot. Extremstell ist $(-\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2})$

b) $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0)$

$= (-1, 1) + \frac{1}{3} (0, -3)$

$= (-1, 0)$

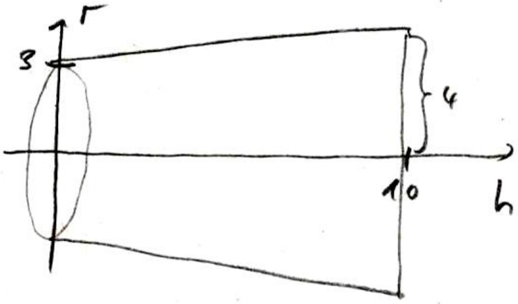
$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + \frac{1}{3} \operatorname{grad} f(x_1, y_1)$

$= (-1, 0) + \frac{1}{3} (1 - e^{-1} ; -1)$

$= (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-1} ; -\frac{1}{3})$

$\approx (-0{,}79 ; -0{,}33)$

Aufgabe 3



Der Radius in Höhe h ist $r(h) = 3\,cm + \frac{1}{10} h$

Damit ist

$$V = \int_0^{10cm} \pi \cdot \left(3cm + \frac{1}{10} h\right)^2 dh$$

$$= \pi \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \left(3cm + \frac{1}{10} h\right)^3 \Big|_0^{10cm}$$

$$= \pi \cdot \frac{10}{3} \left((4cm)^3 - (3cm)^3 \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{10}{3} (64 - 27)\, cm^3$$

$$= \frac{370 \cdot \pi}{3}\, cm^3$$

$$\approx 387{,}46\, cm^3$$

Aufgabe 4

Der Flächen-Normalenvektor $\vec{A}$ geht in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und hat als Länge die Fläche des Rechtecks.

Diese ist $2 \cdot 2\sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$, also

$$\vec{A} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Daher ist $\iint \vec{F}\, d\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4$

[Alternative Berechnung von $\vec{A}$:

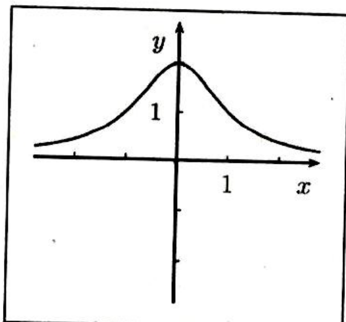
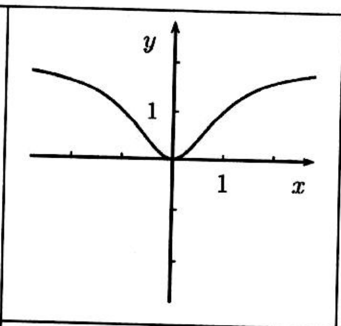
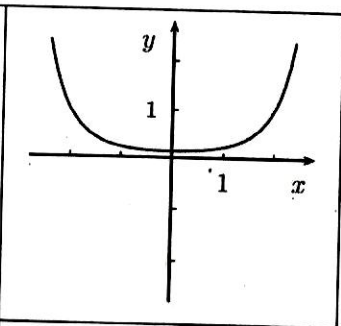
Die Fläche A wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ist $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.]

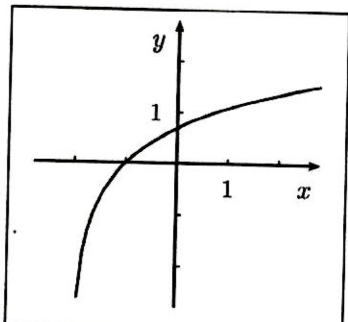
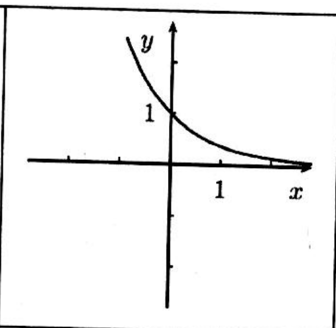
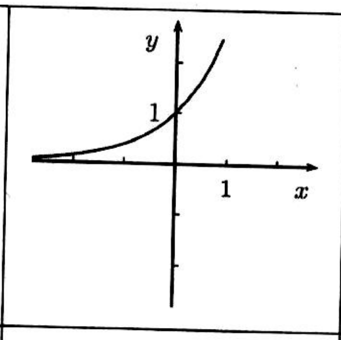
Aufgabe 5 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der abgebildeten Funktionen ist Lösung der entsprechenden Differenzialgleichung? Kreuzen Sie die richtige Antwort (4 Punkte) oder „E.“ für Enthaltung (2 Punkte) an!

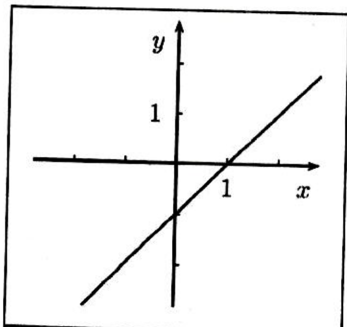
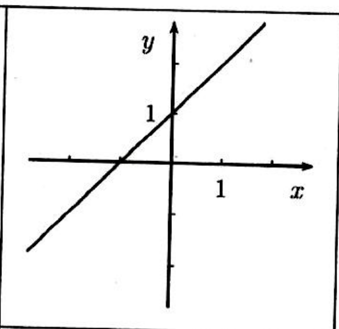
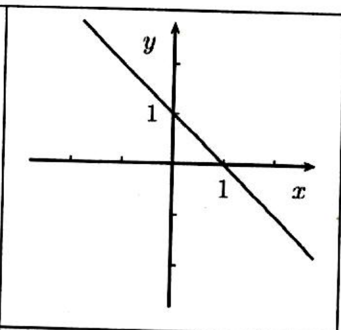
a) $y' = xy$

			E.
		×	

b) $y' = e^{-y}$

			E.
×			

c) $y' = y - x$

			E.
	×		

Aufgabe 6

Das char. Polynom zur DGL ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5$$

Offensichtlich ist -1 eine Nullstelle $\rightarrow y_1(x) = e^{-x}$

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\begin{array}{l} \underline{-(\lambda^3 + \lambda^2)} \\ \quad -4\lambda^2 + \lambda \\ \quad \underline{-(-4\lambda^2 - 4\lambda)} \\ \qquad 5\lambda + 5 \end{array}$$

Nst von $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ sind

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm j \rightarrow y_2(x) = e^{2x} \cdot \cos x$$

$$y_3(x) = e^{2x} \cdot \sin x$$

Die allg. Lsg. ist

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + c_3 \cdot y_3(x)$$

$$= c_1 e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} \cos x + c_3 \cdot e^{2x} \sin x.$$

Aufgabe 7

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = c \cdot \cos(cx+dt) \cdot e^x + \sin(cx+dt) \cdot e^x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = -c^2 \cdot \sin(cx+dt) \cdot e^x + c \cdot \cos(cx+dt) e^x$$

$$+ c \cdot \cos(cx+dt) \cdot e^x + \sin(cx+dt) e^x$$

$$= (1-c^2) \sin(cx+dt) e^x + 2c \cos(cx+dt) \cdot e^x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = d \cdot \cos(cx+dt) \cdot e^x$$

Die DGL ist also erfüllt, wenn

$(1-c^2) = 0$ und $2c = d$ ist

$c > 0$

$\Leftrightarrow$ $c = 1$ und $d = 2c$

also für $c = 1$ und $d = 2$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ die Fourierkoeffizienten zur Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

und f durch ihre Fourierreihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$ dargestellt.

Wie ändern sich die Fourierkoeffizienten, wenn man f wie beschrieben zur Funktion g modifiziert? Tragen Sie in die Tabelle die richtige Nummer der möglichen Modifikationen aus der Liste unten ein.

(Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.)

Modifikation von f	Mod. der Fourier-koeff. entspr. Liste
$g(x) = f(x) + 2$	2
$g(x) = 2 \cdot f(x)$	7
$g(x) = f(-x)$	10
$g(x) = -f(x)$	8
$g(x) = f(x) + 2\cos x$	3

Liste möglicher Modifikationen:

1. a_0 erhöht sich um 2, sonst ändert sich nichts.
2. a_0 erhöht sich um 4, sonst ändert sich nichts.
3. a_1 erhöht sich um 2, sonst ändert sich nichts.
4. a_1 erhöht sich um 4, sonst ändert sich nichts.
5. a_2 erhöht sich um 1, sonst ändert sich nichts.
6. Alle a_k und b_k erhöhen sich um 2.
7. Alle a_k und b_k verdoppeln sich um 2.
8. Alle a_k und b_k wechseln das Vorzeichen.
9. Die a_k wechseln das Vorzeichen, die b_k bleiben gleich.
10. Die b_k wechseln das Vorzeichen, die a_k bleiben gleich.

Aufgabe 9

$$y'' + 3 \cdot y' - 4y = 2 \cdot \sin(3t)$$

$$\left(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 2 - (-1) \right) + 3 \cdot \left(s \cdot Y(s) - 2 \right) - 4 \cdot Y(s) = 2 \cdot \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 3s - 4) \cdot Y(s) = \frac{6}{s^2+9} + 2s - 1 + 6$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+3s-4} \left(\frac{6}{s^2+9} + 2s + 5 \right)$$

Aufgabe 10

W (Regen in 8 - 16 Uhr)

= 1 - W (kein Regen in 8 - 16 Uhr)

= 1 - W (kein Regen in 8 - 12 Uhr und kein Regen in 12 - 16 Uhr)

= 1 - W (kein Regen in 8 - 12 Uhr) · W (kein Regen in 12 - 16 Uhr)

= 1 - (1 - W (Regen in 8 - 12 Uhr)) · (1 - W (Regen in 12 - 16 Uhr))

$= 1 - (1 - 0{,}4) \cdot (1 - 0{,}7)$

$= 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}3$

$= 1 - 0{,}18$

$= 0.82 \mathrel{\hat{=}} 82\%$

Aufgabe 11

a) Es ist $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

und $\overline{x} = \frac{1}{5}(1 + 10 + 3 + 14 + 7) = 7$

Setzt man $\overline{x} = E(X)$ erhält man $\frac{1}{\lambda} = 7 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{7}$.

Damit ist

$$P(\text{Erg} > 10) = \int_{10}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= -e^{-\lambda x} \Big|_{10}^{\infty} = 0 + e^{-\lambda \cdot 10}$$

$$= e^{-\frac{10}{7}} \approx 0{,}24 \mathrel{\hat{=}} 24\%$$

b) Es ist $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

und $s^2 = \frac{1}{4}\left((1-7)^2 + (10-7)^2 + (3-7)^2 + (14-7)^2 + (7-7)^2\right)$

$$= \frac{1}{4}(36 + 9 + 16 + 49 + 0) = \frac{110}{4} = 27{,}5$$

Setzt man $s^2 = V(X)$ erhält man $\frac{1}{\lambda^2} = 27{,}5$

$\Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{27{,}5}} \approx 0{,}19$