Aufgabe 1 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

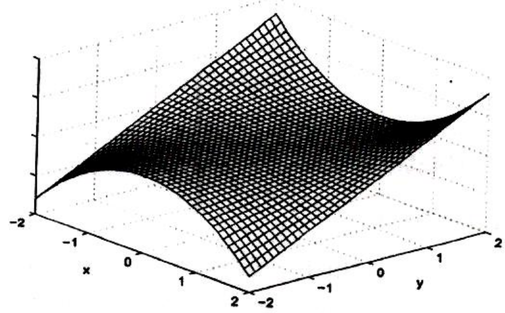
Welche Funktion erzeugt das nebenstehende „Funktionsgebirge"?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

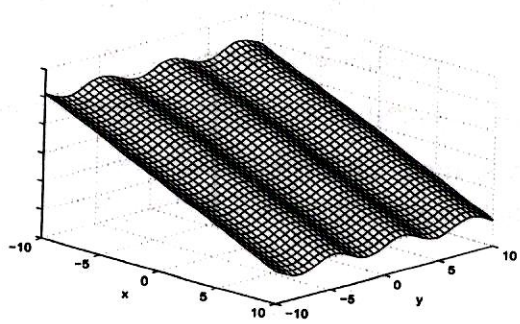
a)

$f(x,y) = x^2 + y$	
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	X
$f(x,y) = x + y^2$	
$f(x,y) = x \cdot y^2$	
Enthaltung	



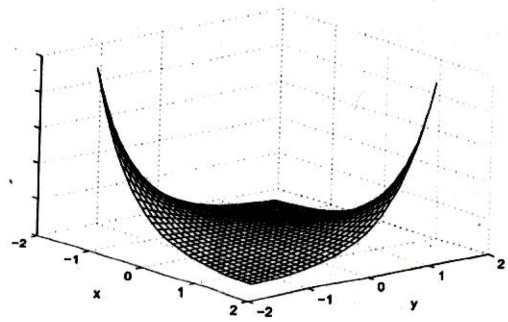
b)

$f(x,y) = \sin(x) - y$	
$f(x,y) = \sin(x - y)$	
$f(x,y) = \sin(y) - x$	X
$f(x,y) = \sin(y - x)$	
Enthaltung	



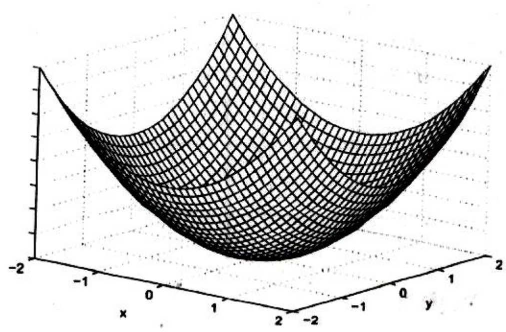
c)

$f(x,y) = e^{xy}$	X
$f(x,y) = e^{x} \cdot e^{y}$	
$f(x,y) = e^{x^2 y^2}$	
$f(x,y) = e^{x^2} \cdot e^{y^2}$	
Enthaltung	



d)

$f(x,y) = (x+y)^2$	
$f(x,y) = x^2 + y^2$	X
$f(x,y) = x^2 \cdot y^2$	
$f(x,y) = (x+y) \cdot xy$	
Enthaltung	



Aufgabe 2

a) $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy^2) & -2xy\sin(xy^2) & 1 \\ 2x\cos y & -x^2\sin(y) & 0 \\ yz^3 & xz^3 & xy\cdot 3z^2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix}$ mit

$$J_f(x_0,y_0,z_0)\cdot\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = -f(x_0,y_0,z_0)$$

also $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Delta z_0 = -3, \quad 2\cdot\Delta x_0 = -1, \quad 8\cdot\Delta y_0 = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

a) In Kugel-KO ist bei $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$: $r=2,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \vartheta=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f = f(2, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = 2^2 \cdot \sin^2\tfrac{\pi}{2} = 4.$$

b) $$\operatorname{grad} f(r,\varphi,\vartheta) = 2r\sin^2\varphi \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta} r^2\, 2\sin\varphi\cos\varphi\, \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\cdot 0 \cdot \vec{e}_\vartheta$$

$$= 2r\sin^2\varphi \cdot \vec{e}_r + \frac{2r\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\vartheta} \cdot \vec{e}_\varphi$$

c) In lokalen Kugel-KO ist

$$\operatorname{grad} f(2, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = 2\cdot 2\cdot 1\, \vec{e}_r + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1} \cdot \vec{e}_\varphi$$

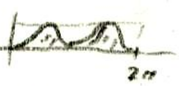
$$= 4\cdot\vec{e}_r$$

In kart. KO entspricht dies $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$.

d) $$\int_{K_1} f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^2 \sin^2\varphi \cdot r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} r^4\, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta$$



$$= \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot (-\cos\vartheta)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \pi \cdot (-(-1)-(-1))$$

$$= \frac{2}{5}\pi$$

Aufgabe 4

a) $\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \vec{0}$ (da $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}) = 0$)

b) $\int \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(r(2)) - \varphi(r(1))$

$= \varphi(2,2,4) - \varphi(1,2,1)$

$= 4 \cdot (2+4) - 1 \cdot (2+1)$

$= 24 - 3$

$= 21$

Aufgabe 5

a) $y'' + 6y' + 5y = 0$

hat das char. Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 5$

mit den Nst -1 und -5, d.h. die allg. Lsg. ist

$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-5x}$

$\Rightarrow y'(x) = -c_1 e^{-x} - 5c_2 e^{-5x}$

Wegen der AB soll gelten

$1 = y(0) = c_1 + c_2 \quad \text{I}$

$4 = y'(0) = -c_1 - 5c_2 \quad \text{II}$

I + II liefert $4 = -4c_2 \Rightarrow c_2 = -1$

aus I: $1 = c_1 + (-1) \Rightarrow c_1 = 2$

$\Rightarrow y(x) = 2e^{-x} - e^{-5x}$

b) 1) Für $a = 0$

2) Für den aperiodischen Grenzfall, also so, dass

das char. Pol. $\lambda^2 + a\lambda + 5$ eine doppelte Nst.

hat, also $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = 5 \Leftrightarrow a^2 = 20$

also für $a = \sqrt{20}$.

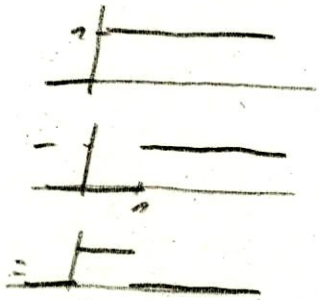
Aufgabe 6

a) 1) $F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \, dt$

$= \int_0^1 1 \cdot e^{-st} \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1$

$= -\frac{1}{s} e^{-s} - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$

2) Es ist $f(t) = H(t) - H(t-1)$



$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s} - e^{-s \cdot 1} \frac{1}{s}$

$= \frac{1 - e^{-s}}{s}$

b) Es ist $g(t) = f(t) + f(t-2) + f(t-4) + \dots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} f(t - 2 \cdot k)$

$\Rightarrow \quad G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s \cdot 2} \cdot F(s)$

$= F(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2s}$

$= F(s) \cdot \frac{1}{1 - e^{-2s}}$.

Aufgabe 7 (4+4+(4+4+4) = 20 Punkte)

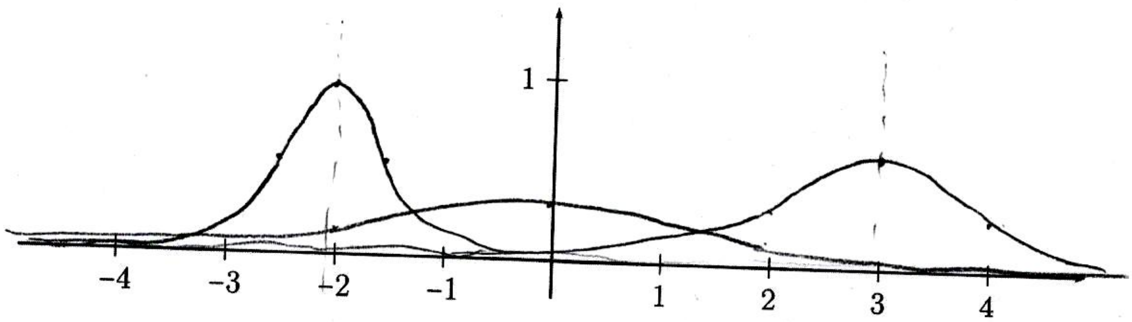
Betrachtet werden die drei Normalverteilungen:

X_1 mit $\mu_1 = 3$ und $\sigma_1 = 1$,

X_2 sei $\mu_2 = -2$ und $\sigma_2 = 0.5$,

X_3 sei $\mu_3 = 0$.

a) Zeichnen Sie die drei Wahrscheinlichkeitsdichten zu X_1, X_2 und X_3 mit $\sigma_3 = 2$ gemeinsam in das folgende Koordinatensystem.



b) Wie groß sind $P(X_1 \in [2,4])$ und $P(X_2 \in [-2,-1])$?
(Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.)

c) Der Wert von σ für X_3 wird so eingestellt, dass $P(X_3 \in [0,1]) = \frac{1}{4}$ ist.

c1) Wie groß ist σ?

c2) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, bei 3 Realisierungen von X_3 mindestens ein Mal einen Wert in $[0,1]$ zu beobachten?

c3) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, bei 8 Realisierungen von X_3 genau drei Mal einen Wert in $[0,1]$ zu beobachten?

Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

b) $P(X_1 \in [2,4]) = 0,683$ $\quad P(X_2 \in [-2,-1]) = \frac{1}{2} \cdot 0.954 = 0,477$

c1) $\frac{1}{4} = \Phi\left(\frac{1-0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0-0}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 0,5$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0,75$

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} \approx 0,67 \quad \Rightarrow \sigma \approx \frac{1}{0,67} \approx 1,49$

c2) P(mindestens ein Mal Erfolg bei 3 Versuchen)

$= 1 - P(\text{3 mal kein Erfolg}) = 1 - (P(\text{kein Erfolg}))^3$

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64} \approx 0,578$

c3) P(genau 3 Erfolge bei 8 Versuchen)

$= \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0,21$