Aufgabe 1 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der Aussagen bzgl. Monotonie der partiellen Funktionen gelten für die angegebenen Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	alle part. Fkt. in x-Richtung sind monoton wachsend			alle part. Fkt. in y-Richtung sind monoton wachsend		
	gilt	gilt nicht	Enth.	gilt	gilt nicht	Enth.
$f(x,y) = e^{x+y}$	X			X		
$f(x,y) = e^{x \cdot y}$		X			X	
$f(x,y) = x \cdot e^{y}$	X				X	

Aufgabe 2

Es ist $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{1\cdot(x+1) - (x+y^2)\cdot 1}{(x+1)^2} , \frac{1}{x+1} \cdot 2y \right)$

$$= \left(\frac{1-y^2}{(x+1)^2} , \frac{2y}{x+1} \right)$$

$$(x_1, y_1) = (0,1) + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{grad} f(0,1)$$
$$= (0,1) + \frac{1}{2}(0,2)$$
$$= (0,2)$$

$$(x_2, y_2) = (0,2) + \frac{1}{2} \operatorname{grad} f(0,2)$$
$$= (0,2) + \frac{1}{2} \cdot (-3, 4)$$
$$= (-1.5, 4).$$

Aufgabe 3

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} y \cdot \sin(c+xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} y \cdot \sin(c+xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\cos(c+xy) \Big|_{x=0}^{1} \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\cos(c+y) + \cos(c) \right) dy$$

$$= \left(-\sin(c+y) + \cos(c) \cdot y \right) \Big|_{y=0}^{2}$$

$$= -\sin(c+2) + \cos(c) \cdot 2 + \sin(c)$$

Aufgabe 4

a) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x+z) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2)$

$= 1 + e^{xy} + xye^{xy} + 0$

$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+z \\ y \cdot e^{xy} \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 0 \\ 1 - 0 \\ y^2 e^{xy} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ y^2 e^{xy} \end{pmatrix}$

b) $\int \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot r'(t)\, dt$

$= \int_0^2 \begin{pmatrix} t+t^2 \\ 1 \cdot e^t \\ 1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} dt$

$= \int_0^2 (t + t^2 + 0 + 2t)\, dt$

$= \int_0^2 (3t + t^2)\, dt$

$= \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^2$

$= 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$

Aufgabe 5 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Zu welcher Differenzialgleichung gehört die nebenstehend gezeichnete Lösungskurve?

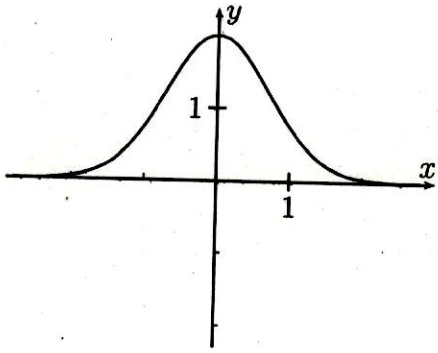
Hinweis: Genau eine Differenzialgleichung ist richtig.

Tipp: Überlegen Sie, welche Differenzialgleichungen Sie ausschließen können, da die Lösung nicht zum Richtungsfeld passt.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (4 Punkte) oder „Enthaltung“ (2 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

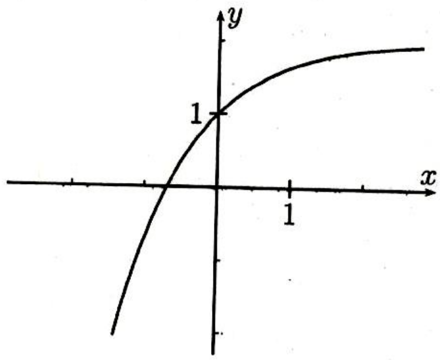
a)

$y' = -2xy$	X
$y' = -2x^2y$	
$y' = -\frac{2x}{y}$	
Enthaltung	



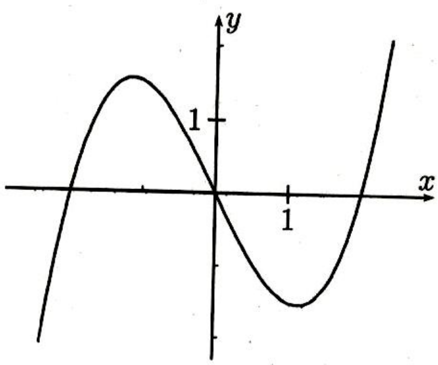
b)

$y' = 2 - y$	X
$y' = 1 - x - y$	
$y' = 2xy$	
Enthaltung	



c)

$y' = \frac{y}{x} + x^2$	X
$y' = -\frac{y}{x} - x^2$	
$y' = -\frac{y}{x} + y^2$	
Enthaltung	



Aufgabe 6

komplexifizieren: $y'' + y' + 5y = 5 \cdot e^{j \cdot 3t}$, später: Realteil!

Ansatz: $y(t) = c \cdot e^{j \cdot 3t}$

$\Rightarrow y'(t) = c \cdot 3j \cdot e^{j \cdot 3t}$

$y''(t) = -c \cdot 9 \cdot e^{j3t}$

Einsetzen: $-c \cdot 9 \, e^{j \cdot 3t} + c \cdot 3j \cdot e^{j3t} + 5 \cdot c \cdot e^{j \cdot 3t} = 5 \cdot e^{j \cdot 3t}$

$\Rightarrow c \cdot (-9 + 3j + 5) = 5$

$\Rightarrow c \cdot (3j - 4) = 5$

$\Rightarrow c = \frac{5}{-4+3j} = \frac{5 \cdot (-4-3j)}{16+9} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} j$

$\Rightarrow y(t) = \left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{5} j\right) \cdot e^{j \cdot 3t}$

$= \left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{5} j\right) \cdot \left(\cos(3t) + j \sin(3t)\right)$

Die Lösung für die ursprüngliche DGL ist also

$y(t) = Re\left(\left(-\frac{4}{5} - \frac{3}{5} j\right) \cdot \left(\cos(3t) + j \cdot \sin(3t)\right)\right)$

$= -\frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{3}{5} \sin(3t).$

Aufgabe 7

Es ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Für $n > 0$ ist

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n\pi} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \cdot (-\cos(nx)) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{n\pi} \cdot \left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$$

Speziell:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \cdot 1, \quad a_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3\pi} \cdot (-1), \quad a_4 = 0$$

$$b_1 = -\frac{1}{\pi}(0-1) = \frac{1}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{1}{2\pi}(-1-1) = \frac{1}{\pi}$$

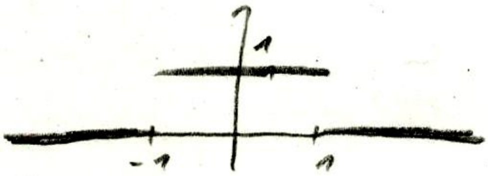
$$b_3 = -\frac{1}{3\pi}(0-1) = \frac{1}{3\pi}, \quad b_4 = -\frac{1}{4\pi}(1-1) = 0$$

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe bis $n \leq 4$ ist

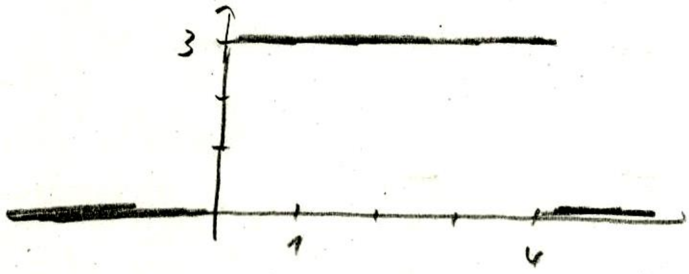
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos x + \frac{1}{\pi} \cdot \sin x$$
$$+ \frac{1}{\pi} \cdot \sin(2x)$$
$$+ \frac{-1}{3\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3\pi} \cdot \sin(3x)$$

Aufgabe 8

f:

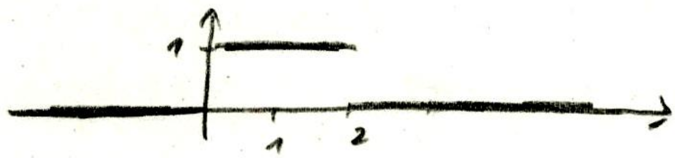


g:



Nutze Hilfsfunktion

h:



also $h(t) = f(t-1)$

$\Rightarrow H(\omega) = e^{-j\omega \cdot 1} \cdot F(\omega) = e^{-j\omega} \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\omega)$

Dann ist $g(t) = 3 \cdot h(\frac{t}{2})$

$\Rightarrow G(\omega) = 3 \cdot |2| \cdot H(2\omega)$

$= 6 \cdot e^{-j2\omega} \frac{2}{2\omega} \cdot \sin(2\omega)$

$= 6 \cdot e^{-j2\omega} \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$

Aufgabe 9

a) $P([0, 0{,}1s]) = \int_0^{0{,}1s} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt$

$= [-e^{-\lambda t}]\Big|_0^{0{,}1s}$

$= -e^{-5s^{-1} 0{,}1s} + e^0$

$= 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}39$

b) Gesucht: T mit

$0{,}5 = \int_0^T \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = (-e^{-\lambda t})\Big|_0^T = -e^{-\lambda \cdot T} + 1$

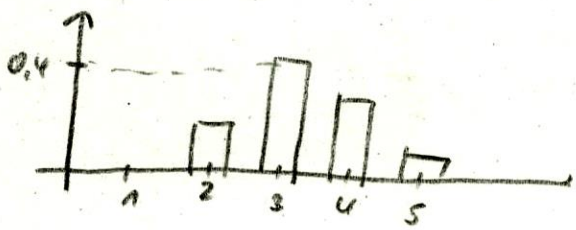
$\Leftrightarrow e^{-\lambda \cdot T} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow -\lambda T = \ln(0{,}5)$

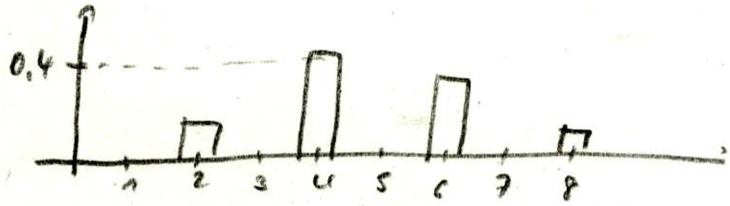
$\Leftrightarrow T = -\frac{\ln(0{,}5)}{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}5)}{5s^{-1}} \approx 0{,}139$

Aufgabe 10

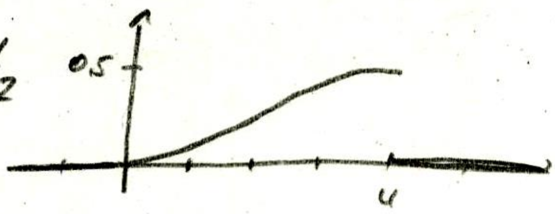
a) Y_1:



Z_1



b) Y_2



Z_2