Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die Punkte P_1 und P_2 sollen in kartesischen, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten dargestellt werden. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben.

	kart.-KO	Zylinder-KO	Kugel-KO
P_1	$x = 0$ $y = 1$ $z = 1$	$\rho = 1$ $\varphi = \pi/2$ $z = 1$	$r = \sqrt{2}$ $\varphi = \pi/2$ $\vartheta = \pi/4$
P_2	$x = -2$ $y = 0$ $z = 0$	$\rho = 2$ $\varphi = \pi$ $z = 0$	$r = 2$ $\varphi = \pi$ $\vartheta = \pi/2$

Aufgabe 2

a) grad $f(x,y,z)$

$$= \left(y^2 e^{-2xz} - 2xy^2 z\, e^{-2xz},\ 2xy\, e^{-2xz},\ -2x^2y^2 e^{-2xz} \right)$$

$$\text{grad } f(2,1,0) = (1,\ 4,\ -8)$$

b) Mit $f(2,1,0) = 2$ ist

grad $f(x,y,z)$

$$\approx \left(\frac{f(2.1,\ 1,\ 0) - 2}{0.1},\ \frac{f(2,\ 1.1,\ 0) - 2}{0.1},\ \frac{f(2,\ 1,\ 0.1) - 2}{0.1} \right)$$

$$\approx (\ 1\ ,\ 4.2\ ,\ -6.59\ )$$

c) $|f(x,y,z) - f(2,1,0)|$

$$\approx \left| \text{grad } f(2,1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |1\cdot(x-2) + 4\cdot(y-1) - 8\cdot(z-0)|$$

$$\leq 1\cdot\underbrace{|x-2|}_{\leq 0.1} + 4\cdot\underbrace{|y-1|}_{\leq 0.1} + 8\cdot\underbrace{|z-0|}_{\leq 0.1}$$

$$\leq 1\cdot 0.1 + 4\cdot 0.1 + 8\cdot 0.1$$

$$= 1.3$$

Aufgabe 3

In Polar-Koordinaten ist

$$e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2},$$

also

$$\int_{K_R} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, d(x,y) = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_{r=0}^{R} 2\pi \cdot e^{-r^2} \cdot r \, dr$$

$$= -\pi \cdot e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{R}$$

$$= -\pi \cdot e^{-R^2} + \pi$$

$$= \pi \cdot \left(1 - e^{-R^2}\right)$$

Aufgabe 4

a) Offensichtlich ist $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$.

Daher ist $\int \vec{F}\, d\vec{r}$ zu jedem geschlossenen Weg

gleich 0.

[Alternative Begründung:

Nach dem Satz von Stokes ist daher mit

der Fläche A, die von $\vec{r}$ umrandet wird

$$\int \vec{F}\, d\vec{r} = \iint \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{A} = \iint \vec{0}\, d\vec{A} = 0$$]

b) Offensichtlich ist $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{0}$

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist daher

$$\iint \vec{F}\, d\vec{A} = \iiint_{\text{Kugel}} \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iiint_{\text{Kugel}} 0\, dV = 0.$$

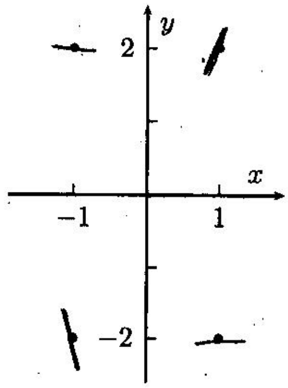
c) 3π.

Aufgabe 5 $(2 + 4 + 8 = 14$ Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' = 4x + 2y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 1$.



a) Skizzieren Sie in der nebenstehenden Skizze die Richtungselemente zur Differenzialgleichung an den vier markierten Punkten.

b) Berechnen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems mit Schrittweite $h = 0.5$.

c) Die Differenzialgleichung ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung mit spezieller Lösung $y_s(x) = -2x - 1$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)

c1) Wie lautet die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung, und welche Lösungen besitzt diese homogene Gleichung?

c2) Wie lautet die exakte Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems?

b) $y(0{,}5) \approx y(0) + 0{,}5 \cdot y'(0)$

$= 1 + 0{,}5 \cdot (4 \cdot 0 + 2 \cdot \underbrace{y(0)}_{=1}) = 2$

$y(1) \approx y(0{,}5) + 0{,}5 \cdot y'(0{,}5)$

$\approx 2 + 0{,}5 \cdot (4 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot \underbrace{y(0{,}5)}_{=2}) \approx 5$

c) c1) $y' - 2y = 0$

mit Lösung $y(x) = c \cdot e^{2x}$

c2) Ansatz: $y(x) = y_s(x) + c \cdot e^{2x}$

$= -2x - 1 + c \cdot e^{2x}$

mit $1 = y(0) = -2 \cdot 0 - 1 + c \cdot e^{0} = -1 + c$

$\Rightarrow c = 2$

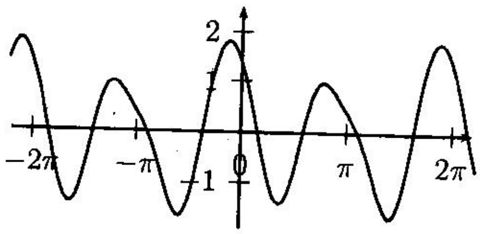
$\Rightarrow y(x) = -2x - 1 + 2 \cdot e^{2x}$

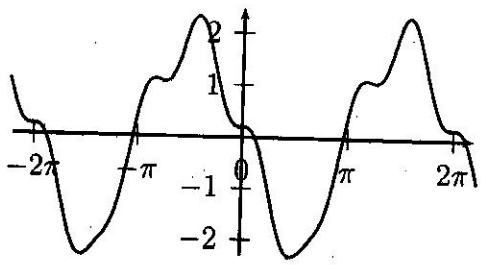
Aufgabe 6 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

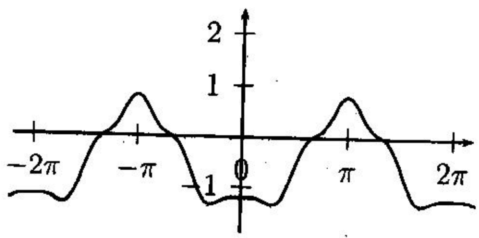
Welche Spalte zeigt die richtigen ersten Fourierkoeffizienten zu der links dargestellten 2π-periodischen Funktion?

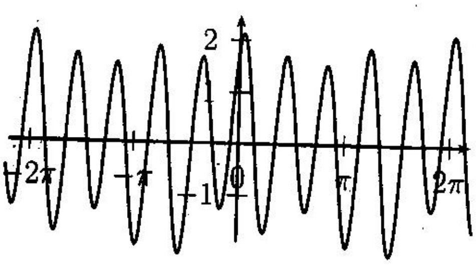
Die weiteren Fourierkoeffizienten sind irgendwelche reellen Zahlen.

Kreuzen Sie die richtige Spalte (3 Punkte) oder „E.“ für Enthaltung (1 Punkt) an!

	$a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0.3$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$	$a_0 = 1.2$ $a_1 = 0.3$ $a_2 = 1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -1$	E.
			X		

	$a_0 = 0$ $a_1 = -2$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = -2$ $b_1 = 0.2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = -2$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -2$	E.
			X		

	$a_0 = -1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = 1$ $a_1 = -1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = 0$ $b_2 = 0$	$a_0 = -1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$	$a_0 = 1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $b_1 = -1$ $b_2 = 0.2$	E.
	X				

	$a_0 = 5$ $a_1 = 0.1$ $a_2 = 0.2$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 5$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = -0.1$ $b_2 = 0.1$	$a_0 = -0.2$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 5$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$	$a_0 = 0.1$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 0.1$ $b_1 = 0.1$ $b_2 = -0.1$	E.
				X	

Aufgabe 7

a) $\cos(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+9}$

$\Rightarrow e^{4t}\cos(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s-4}{(s-4)^2+9}$

b) Partialbruchzerlegung: s^2-3s+2 hat Nst 1 und 2

$\Rightarrow$ Ansatz $\dfrac{s+1}{s^2-3s+2} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-2}$

$= \dfrac{A(s-2)+B(s-1)}{(s-1)\cdot(s-2)}$

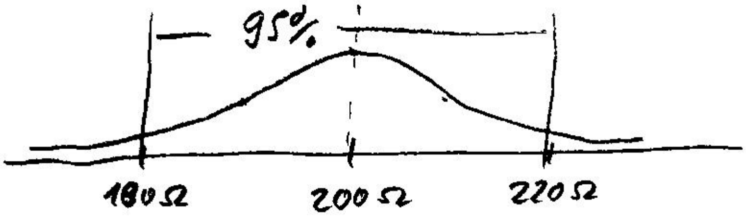
$s=2$ in Zähler $\Rightarrow$ $3 = B$

$s=1$ " " $\Rightarrow$ $2 = A\cdot(-1)$ $\Rightarrow$ $A = -2$

$\Rightarrow \dfrac{s+1}{s^2-3s+2} = \dfrac{-2}{s-1} + \dfrac{3}{s-2}$

$\circ\!\!-\!\!\bullet\ -2\cdot e^{t} + 3\cdot e^{2t}$

Aufgabe 8:



95%-Bereich $\hat{=}$ $\mu \pm 1{,}96\,\sigma$

Also $\begin{matrix} 180\,\Omega \\ 220\,\Omega \end{matrix}$ $\hat{=}$ $200\,\Omega \pm 1{,}96\,\sigma$

$\Rightarrow 20\,\Omega = 1{,}96 \cdot \sigma$

$\Rightarrow \sigma = \dfrac{20\,\Omega}{1{,}96}$

$$P_{\mu = 200\Omega,\ \sigma = \frac{20\Omega}{1{,}96}}([190\,\Omega, 210\,\Omega])$$

$$= \phi\left(\frac{210\,\Omega - 200\,\Omega}{\frac{20\,\Omega}{1{,}96}}\right) - \phi\left(\frac{190\,\Omega - 200\,\Omega}{20\,\Omega / 1{,}96}\right)$$

$$= \phi(0{,}5 \cdot 1{,}96) - \phi(-0{,}5 \cdot 1{,}96)$$

$$= \phi(0.98) - (1 - \phi(0.98))$$

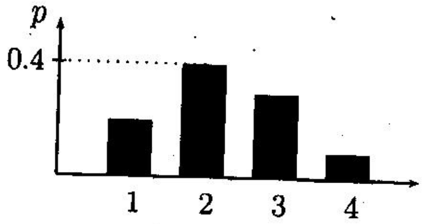
$$= 2 \cdot \phi(0.98) - 1$$

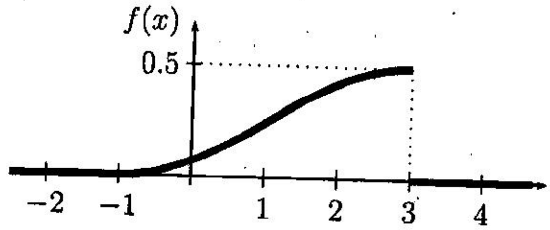
$$= 2 \cdot 0{,}83646 - 1$$

$$= 0{,}67292$$

Aufgabe 9 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Werten aus $\{1, 2, 3, 4\}$ und Wahrscheinlichkeiten $p(k)$ wie im linken Bild und X_2 eine stetige Zufallsvariable mit einer Dichte $f(x)$ wie im rechten Bild skizziert. Die Dichte f ist nur im Intervall $]-1; 3[$ größer als Null.





Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

a) Sind die in der folgenden Tabelle links dargestellten Werte kleiner, gleich oder größer den Werten rechts? Tragen Sie das richtige Zeichen (2 Punkte) oder „E“ für „Enthaltung“ (1 Punkt) ein.
(Tipp: Beachten Sie bei den letzten beiden Teilen den Unterschied zwischen diskreter und stetiger Zufallsvariable!)

	<, =, > oder „E“	
$P(X_1 < 2.5)$	>	0.5
$P(X_2 \leq 1)$	<	0.5
$P(X_1 = 2)$	>	$P(X_1 = 3)$
$P(X_2 = 1)$	=	$P(X_2 = 2)$

b) Markieren Sie den jeweils richtigen (gerundeten) Zahlenwert für die die Erwartungswerte und Standardabweichungen (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt).

$E(X_1)$	
2	
2.3	x
2.5	
3	
Enth.	

$E(X_2)$	
1	
1.81	x
2.57	
3	
Enth.	

Std.abw. von X_1	
−0.2	
0.3	
0.9	x
1.3	
Enth.	

Std.abw. von X_2	
−0.13	
0.23	
0.82	x
1.34	
Enth.	