Aufgabe 1

$$d(a,b) = \left(f(1,0)-2\right)^2 + \left(f(0,3)-1\right)^2 + \left(f(1,2)-0\right)^2$$
$$= (a-2)^2 + (3b-1)^2 + (a+2b)^2$$

Kandidaten für Min-Stelle sind Nst. des Gradienten:

$$(0,0) \stackrel{!}{=} \operatorname{grad} d(a,b) = \left(2(a-2)+2(a+2b),\ 2\cdot3\cdot(3b-1)+2\cdot2(a+2b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2\cdot(2a+2b-2)$$
$$0 = 2\cdot(9b-3+2a+4b)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = a+b-1$$
$$0 = 2a+13b-3 \quad -2\mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad 0 = 11b-1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{11}$$

aus I: $a = 1-b = 1-\frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

Offensichtlich gibt es eine Minstelle ($d(a,b) \to \infty$ für $a,b \to \pm\infty$),

also ist $a = \frac{10}{11}$, $b = \frac{1}{11}$ die gesuchte Minstelle

Aufgabe 2

a) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy) \\ y^2 & 2xy \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$

b) $f(1{,}9, 0{,}05) = f(2+(-0{,}1), 0+0{,}05)$

$$\approx f(2,0) + J_f(2,0)\cdot\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0 \\ -0{,}35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0 \\ 3{,}65 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) $$I = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} (1-r)\cos\varphi \cdot r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{r=0}^{1} (r-r^2)\, dr \cdot \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^1 \cdot 2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2$$

$$= \frac{1}{3}$$

b) $I_1 < I$, da f im linken Halbkreis < 0 ist (wegen $\varphi \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ und $\cos\varphi < 0$ in diesem Bereich)

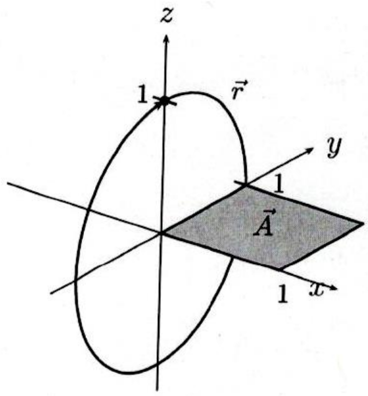
$I_2 < I$, da der Def.bereich D_2 eine echte Teilmenge von D ist und $f > 0$ auf $D \setminus D_2$ ist

$I_3 < I$, da $f < 0$ in $D_3 \setminus D$ (wegen $r > 1$ dort, also $1 - r < 0$).

Aufgabe 4 (20 Punkte, davon bis zu 10 Enthaltungspunkte)

Entsprechend der Skizze sei

> $\vec{A}$ das Einheitsquadrat in der (x, y)-Ebene und
>
> $\vec{r}$ ein Weg, der ausgehend von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Einheitskreis in der (y, z)-Ebene umrandet.



Gelten die folgenden Aussagen für alle „braven" Vektorfelder

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} ?$$

Kreuzen Sie die richtige Angabe (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an.

		gilt	gilt nicht	Enth.
$\iint \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{A}$	hängt nicht von F_1 ab.	X		
	hängt nicht von F_2 ab.	X		
	hängt nicht von F_3 ab.		X	
$\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r}$	hängt nicht von F_1 ab.	X		
	hängt nicht von F_2 ab.		X	
	hängt nicht von F_3 ab.		X	
Ist überall $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, so ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$.		X		
Ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$, so ist überall $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.			X	
Ist überall $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, so ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$.			X	
Ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld, so ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$.		X		

Aufgabe 5

a) $\lambda = -2 \pm 5j$ müssen Nst. des char. Polynoms sein,

also $p(\lambda) = (\lambda - (-2+5j)) \cdot (\lambda - (-2-5j))$

$= ((\lambda+2) - 5j) \cdot ((\lambda+2) + 5j)$

$= (\lambda+2)^2 - (5j)^2$

$= \lambda^2 + 4\lambda + 4 - (-25)$

$= \lambda^2 + 4\lambda + 29$

$\Rightarrow a = 4$ und $b = 29$

b) $y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$

$= c_1 \cdot e^{-2t} \sin(5t) + c_2 \cdot e^{-2t} \cos(5t)$

$\Rightarrow y'(t) = -2 \cdot e^{-2t} \cdot (c_1 \cdot \sin(5t) + c_2 \cdot \cos(5t))$

$+ e^{-2t} (5 \cdot c_1 \cos(5t) - 5c_2 \sin(5t))$

Wegen der AB gilt

$3 = y(0) = c_2$ und

$4 = y'(0) = -2 \cdot c_2 + 1 \cdot 5 \cdot c_1$ $\overset{c_2=3}{\Rightarrow} 4 = -6 + 5c_1$

$\Leftrightarrow 10 = 5c_1$

$\Leftrightarrow c_1 = 2$

$\Rightarrow y(t) = 2 \cdot e^{-2t} \sin(5t) + 3 \cdot e^{-2t} \cos(5t)$

Aufgabe 6

a) $G(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$

$= \int\limits_{-3}^{-1} e^{-j\omega t} \, dt + \int\limits_{1}^{3} e^{-j\omega t} \, dt$

$= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-3}^{-1} + \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{1}^{3}$

$= \frac{1}{-j\omega} \left(e^{+j\omega} - e^{+j\omega \cdot 3} + e^{-j\omega \cdot 3} - e^{-j\omega} \right)$

$= \frac{1}{-j\omega} \Big(\cancel{\cos(\omega)} + j \sin(\omega) - (\cancel{\cos(\omega)} - j \sin(\omega))$

$- (\cancel{\cos(3\omega)} + j \sin(3\omega)) + \cancel{\cos(3\omega)} - j \sin(3\omega) \Big)$

$= \frac{1}{-j\omega} \left(2j \sin(\omega) - 2j \sin(3\omega) \right)$

$= -\frac{2}{\omega} \left(\sin(\omega) - \sin(3\omega) \right)$

b) $g(t) = f(t+2) + f(t-2)$

$\Rightarrow G(\omega) = e^{j\omega \cdot 2} \cdot F(\omega) + e^{-j\omega \cdot 2} \cdot F(\omega)$

$= \left(\cos(2\omega) + j \cdot \sin(2\omega) + \cos(2\omega) - j \cdot \sin(2\omega) \right) \cdot F(\omega)$

$= 2 \cdot \cos(2\omega) \cdot \frac{2 \sin \omega}{\omega}$

Aufgabe 7

a) Schon aus Symmetriegründen sieht man $p_0 = 1/4$

Formal: Es ist $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x \quad (x \in [0;2])$

also $p_0 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$

$$= \left(x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_1^2 = (2-1) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

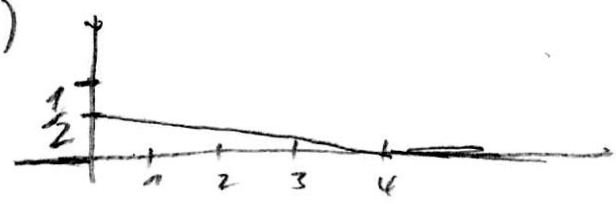
b) W'(mindestens eine > 1)

$= 1 - $ W'(beide < 1)

$= 1 - (1 - p_0)^2$

$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

c)



Aufgabe 8

a) $\bar{x} = \frac{1}{5}\left(23s + 42s + 15s + 7s + 18s\right) = 21s$

$$s^2 = \frac{1}{4}\left((23s-21s)^2 + (42s-21s)^2 + \dots + (18s-21s)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4 + 21^2 + 36 + 14^2 + 9\right)s^2$$

$$= 171.5\,s^2$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} \approx 13,1$$

b) Es ist $\bar{x} \approx E(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$

also $\lambda \approx \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{21s} \approx 0,0476\,s^{-1}$