Aufgabe 1

			E.
Die Stelle $(x, y) = (-0.5, -0.5)$ ist	Minimalstelle		
	Maximalstelle		
	Sattelstelle	X	
Die Stelle $(x, y) = (0.5, 0.5)$ ist	Minimalstelle	X	
	Maximalstelle		
	Sattelstelle		
Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt	$f(x, y) = f(y, x)$	X	
	$f(x, y) = f(x, -y)$		
	$f(x, y) = f(-x, -y)$		
$\operatorname{grad} f(1, -1) \approx$	$(-1.64, 5.08)$		
	$(1.64, -5.08)$	X	
	$(5.08, -1.64)$		
$\operatorname{grad} f(1.5, 0.5) \approx$	$(2.55, -0.81)$	X	
	$(-0.81, 2.55)$		
	$(0.13, 0.13)$		
$\frac{\partial}{\partial x} f(-1, 1) \approx$	-5.0	X	
	0.0		
	5.0		
$\frac{\partial}{\partial y} f(1, -0.5) \approx$	-3.9	X	
	1.5		
	2.8		
$\int_{[-2,2]\times[-2,2]} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)$	< 0		
	$= 0$		
	> 0	X	

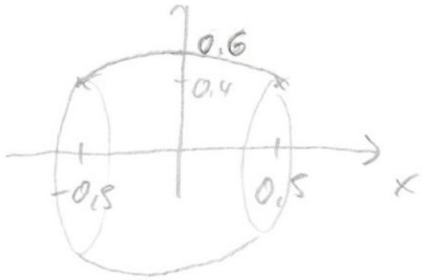
Aufgabe 2

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (4x-4+y,\ x+z,\ y)$

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0) - \tfrac{1}{2} \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$$
$$= (-1,2,1) - \tfrac{1}{2} \cdot (-6, 0, 2)$$
$$= (-1,2,1) - (-3,0,1)$$
$$= (2,2,0)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1) - \tfrac{1}{2} \operatorname{grad} f(x_1, y_1, z_1)$$
$$= (2,2,0) - \tfrac{1}{2}(6, 2, 2)$$
$$= (2,2,0) - (3,1,1)$$
$$= (-1, 1, -1)$$

Aufgabe 3



Die Parabel wie skizziert wird beschrieben durch

$$f(x) = c x^2 + 0{,}6$$

mit $0{,}4 = f(0{,}5) = c \cdot 0{,}25 + 0{,}6$

$\Leftrightarrow \quad -0{,}2 = c \cdot 0{,}25$

$\Leftrightarrow \quad c = -0{,}8$

also $f(x) = -0{,}8\, x^2 + 0{,}5$

Als Rotationskörper hat das Fass damit das Volumen

$$V = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} \pi \cdot (-0{,}8\, x^2 + 0{,}6)^2 \, dx$$

$$\overset{\text{Sym.}}{=} 2 \cdot \pi \int_0^{0{,}5} (0{,}64\, x^4 - 0{,}96\, x^2 + 0{,}36)\, dx$$

$$= 2 \cdot \pi \left(\frac{0{,}64}{5} x^5 - \frac{0{,}96}{3} x^3 + 0{,}36 \cdot x \right) \Big|_0^{0{,}5}$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{0{,}02}{5} - \frac{0{,}12}{3} + 0{,}18 \right)$$

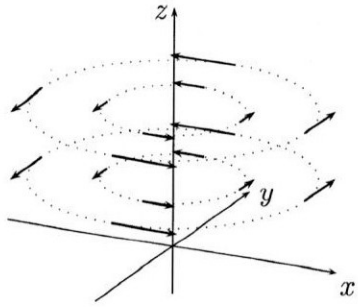
$$= 0{,}288 \cdot \pi \approx 0{,}9048$$

Aufgabe 4 ($4 + 4 + 8 = 16$ Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Hinweis: Durch die folgenden Angaben sind die Vektorfelder $\vec{F}$ nicht eindeutig bestimmt. Bei a1) und a2) reichen jeweils *eine* richtige Angabe.

a1) Geben Sie mit Hilfe lokaler Zylinderkoordinaten eine Funktionsvorschrift an für ein Vektorfeld $\vec{F}$, das das folgende Verhalten zeigt:

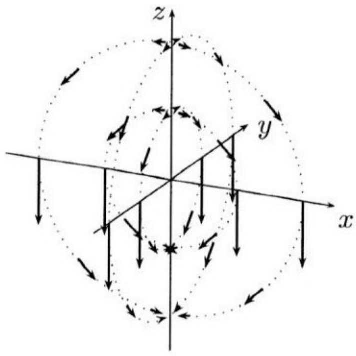
Die Richtung von $\vec{F}$ ist jeweils tangential zu Kreisen um die z-Achse; nach außen hin wird $\vec{F}$ länger.



$\vec{F} = \varrho \cdot \vec{e}_\varphi$

a2) Geben Sie mit Hilfe lokaler Kugelkoordinaten eine Funktionsvorschrift an für ein Vektorfeld $\vec{F}$, das das folgende Verhalten zeigt:

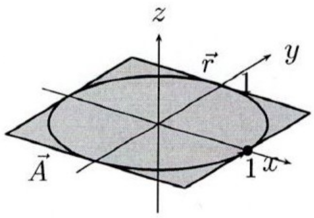
Die Richtung von $\vec{F}$ ist jeweils tangential zu einer Kugel um den Ursprung abwärts gerichtet; die größte Länge wird beim Durchstoßen der (x, y)-Ebene erreicht; bei Annäherung an die z-Achse geht die Länge gegen 0.



$\vec{F} = \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta$

b) Entsprechend der Skizze sei

- $\vec{r}$ der Weg, der ausgehend von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ den Einheitskreis in der (x, y)-Ebene umrandet,
- $\vec{A}$ das Quadrat in der (x, y)-Ebene mit den Eckpunkten $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, -1, 0)$ und $(-1, 1, 0)$.



Sind die in der Tabelle angegebenen Weg- bzw. Flächenintegrale für jedes Vektorfeld entsprechend a1) bzw. a2) gleich Null?

Kreuzen Sie den richtigen Eintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

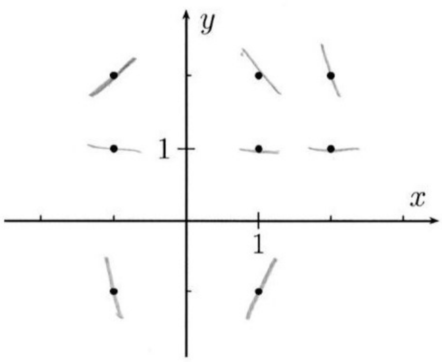
		gilt	gilt nicht	Enth.
Für Vektorfelder $\vec{F}$ entspr. a1)	$\int \vec{F}\, d\vec{r} = 0$		X	
	$\iint \vec{F}\, d\vec{A} = 0$	X		
Für Vektorfelder $\vec{F}$ entspr. a2)	$\int \vec{F}\, d\vec{r} = 0$	X		
	$\iint \vec{F}\, d\vec{A} = 0$		X	

Aufgabe 5 $(4 + 6 = 10$ Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' \; = \; x \cdot (1 - y).$$

a) Zeichnen Sie in das Diagramm an den markierten acht Punkten die Richtungselemente für das Richtungsfeld der Differenzialgleichung.



b) Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = 0$ zu der Differenzialgleichung, Schrittweite 0.5, aus.

$$y(1{,}5) \approx y(1) + 0{,}5 \cdot y'(1)$$
$$= 0 + 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$$

$$y(2) \approx y(1{,}5) + 0{,}5 \cdot y'(1{,}5)$$
$$\approx 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \left(1{,}5 \cdot (1 - 1{,}5)\right)$$
$$= 0{,}875$$

Aufgabe 6

Es ist
$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = 2\cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x} + \lambda \cdot \sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) &= -4\sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x} \\ &\quad + 2\lambda \cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x} \\ &\quad + \lambda \cdot 2 \cdot \cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x} \\ &\quad + \lambda^2 \sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2-4)\sin(ct+2x)\cdot e^{\lambda x} \\ &\quad + 4\lambda \cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}\end{aligned}$$

und
$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = c\cdot\cos(ct+2x)\cdot e^{\lambda x}$$

Um die DGL zu erfüllen, muss also $\lambda^2-4=0$ und $c=4\lambda$ sein, also $\lambda=2$ und $c=8$

Aufgabe 7

a) $y'' + 3y' - 4y = 2\sin(3t)$

$$s^2 Y(s) - s \cdot 2 - (-1) + 3 \cdot \left(s \cdot Y(s) - 2 \right) - 4\,Y(s) = 2 \cdot \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2 + 3s - 4 \right) Y(s) - 2s + 1 - 6 = \frac{6}{s^2+9}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2+3s-4} \cdot \left(\frac{6}{s^2+9} + 2s + 5 \right)$$

b) Partialbruch-Zerl.: $s^2 - 5s + 6$ hat Nst. 2 und 3

$\rightarrow$ Ansatz: $\dfrac{2s-2}{s^2-5s+6} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s-3} = \dfrac{A(s-3) + B(s-2)}{s^2-5s+6}$

$s = 3$ in Zähler ergibt $4 = B$

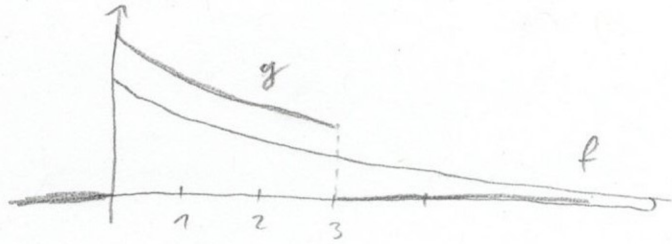
$s = 2$ " " " $2 = -A \Rightarrow A = -2$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{-2}{s-2} + \frac{4}{s-3}$$

$$f(t) = -2 \cdot e^{2t} + 4 \cdot e^{3t}$$

Aufgabe 8

a)



b) Die Gesamtfläche muss gleich 1 sein, also

$$1 = \int_0^3 c \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx = -c \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^3 = c \cdot \left(-e^{-3\lambda} + 1\right)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{1 - e^{-3\lambda}}$$

c1) $$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x)\, dx = \int_0^3 x \cdot c \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx$$

$$= \frac{c}{3} \int_0^3 x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}\, dx$$

$$= \frac{c}{3}\left[x \cdot (-3 e^{-\frac{1}{3}x}) \Big|_0^3 - \int_0^3 1 \cdot (-3 \cdot e^{-\frac{1}{3}x})\, dx\right]$$

$$= \frac{c}{3}\left[-9 \cdot e^{-1} - 0 + 3 \cdot (-3) \cdot e^{-\frac{1}{3}x} \Big|_0^3\right]$$

$$= \frac{e}{e-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[-9 \cdot e^{-1} - 9 \cdot e^{-1} + 9\right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{e}{e-1} \cdot (9 - 18 e^{-1})$$

$$= \frac{3e - 6}{e - 1} \approx 1{,}254$$

c2) 0,845 ist richtig