Aufgabe 1 (8 Punkte)

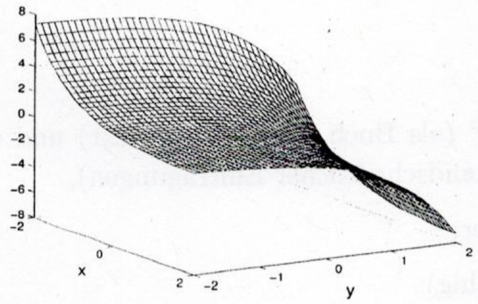
Die in den Bildern dargestellten Funktionen haben jeweils die Funktionsvorschrift

$$f(x,y) \;=\; a \cdot \mathrm{e}^{bx} + c \cdot \mathrm{e}^{dy}$$

mit speziellen $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}$.

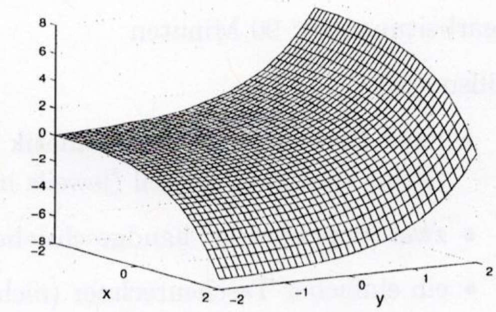
Geben Sie die konkreten Funktionsvorschriften zu den Bildern an.

a)



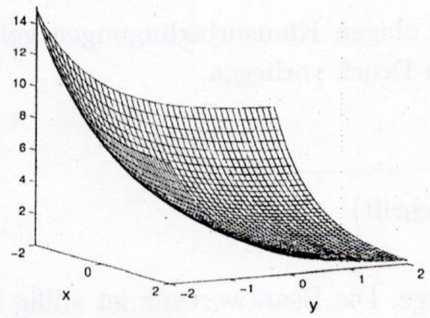
$f(x,y) \;=\;$ $e^{-x} - e^{y}$

b)



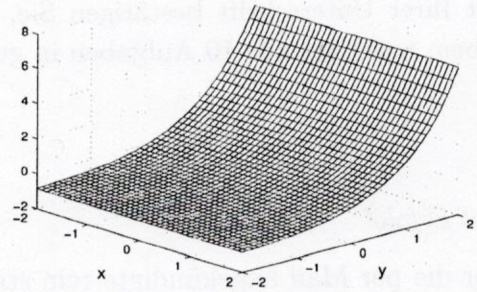
$f(x,y) \;=\;$ $-e^{x} + e^{y}$

c)



$f(x,y) \;=\;$ $e^{-x} + e^{-y}$

d)



$f(x,y) \;=\;$ $-1 + e^{y}$

Aufgabe 2

Es ist $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ 6x^2 & 2y \end{pmatrix}$

1. Schritt

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \left(J_f(1,2)\right)^{-1} \cdot \left(-f(1,2)\right) = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \left(J_f(1,1)\right)^{-1} \cdot \left(-f(1,1)\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$\int_D x^2 z e^{xyz} \, d(x,y,z) = \int_{x=0}^{3} \int_{z=0}^{2} \int_{y=0}^{1} x^2 z e^{xyz} \, dy \, dz \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{3} \int_{z=0}^{2} x e^{xyz} \Big|_{y=0}^{1} \, dz \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{3} \int_{z=0}^{2} \left(x \cdot e^{xz} - x \right) dz \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{3} \left(e^{xz} - xz \right) \Big|_{z=0}^{2} \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{3} \left(e^{2x} - 2x - 1 \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{2x} - x^2 - x \right) \Big|_{0}^{3}$$

$$= \frac{1}{2} e^6 - 9 - 3 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} e^6 - \frac{25}{2}$$

$$\approx 189{,}21$$

Aufgabe 4

a) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(3x+4y+5z) + \frac{\partial}{\partial y}(x\cdot y) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2+z^2)$

$= \quad 3 \quad + \quad x \quad + 2z$

$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3x+4y+5z \\ x\cdot y \\ y^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-0 \\ 5-0 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 5 \\ y-4 \end{pmatrix}$

b) Nein, denn sonst wäre

$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \vec{0}$,

aber an a) sieht man $\vec{F} \neq 0$.

Aufgabe 5

Das char. Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$

mit Nst $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j$.

Also sind $y_1(t) := e^{-t} \cdot \cos(2t)$

und $y_2(t) = e^{-t} \cdot \sin(2t)$

Lösungen und die allg. Lösung lautet

$$y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$$

$$= e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t))$$

Aufgabe 6 (8 + 4 = 12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Die beiden Funktionen $u(t)$ und $v(t)$, die die Populationsgröße bestimmter Spezies U bzw. V angeben, erfüllen das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u' &= 5 - v \\ v' &= u \cdot v. \end{aligned}$$

(Dabei wird davon ausgegangen, dass $u(t) \geq 0$ und $v(t) \geq 0$ ist.)

a) Kreuzen Sie die richtigen Zusammenhänge (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) in der folgenden Tabelle an.

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

U vermehrt sich mehr,	je größer U ist.		U vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	X
	unabh. von U.	X		unabh. von V.	
	Enthaltung			Enthaltung	
V vermehrt sich mehr,	je größer U ist.	X	V vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	X
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	
	unabh. von U.			unabh. von V.	
	Enthaltung			Enthaltung	

b) Führen Sie zu der Anfangssituation $u(0) = 2$ und $v(0) = 3$ einen Schritt des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.1$ durch.

$$\begin{pmatrix} u(0{,}1) \\ v(0{,}1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u(0) + u'(0) \cdot 0{,}1 \\ v(0) + v'(0) \cdot 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u(0) + (5 - v(0)) \cdot 0{,}1 \\ v(0) + u(0) \cdot v(0) \cdot 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + (5-3) \cdot 0{,}1 \\ 3 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}1 \end{pmatrix}$$

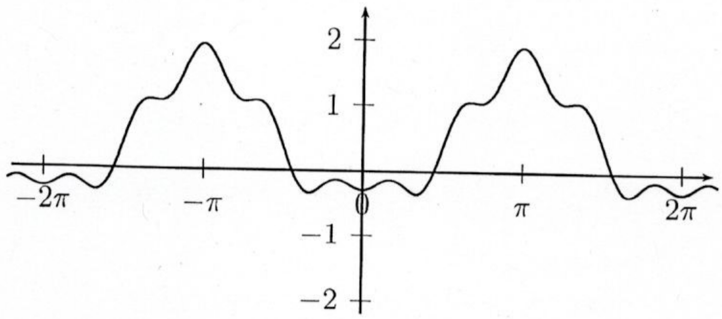
$$= \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Für die Fourierkoeffizienten der dargestellten 2π-periodischen Funktionen gilt

- $a_0 \in \{-1, 0, 1\}$,
- einer der Fourierkoeffizienten $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ ist gleich $+1$ oder -1, die anderen drei sind gleich Null,
- die weiteren Koeffizienten sind irgendwelche betragsmäßig kleine reelle Zahlen.

Geben Sie die richtigen Werte für $a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2$ und b_2 an.



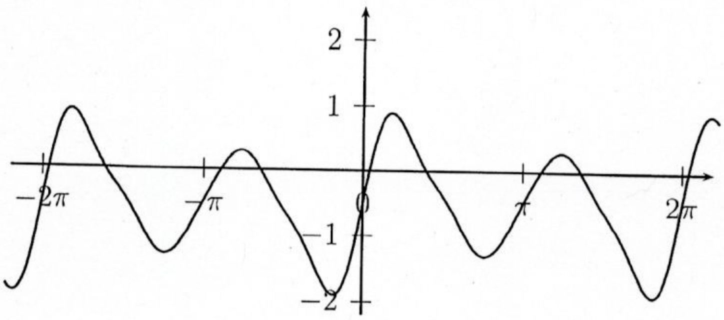
$a_0 = 1$

$a_1 = -1$

$b_1 = 0$

$a_2 = 0$

$b_2 = 0$



$a_0 = -1$

$a_1 = 0$

$b_1 = 0$

$a_2 = 0$

$b_2 = 1$

Aufgabe 8

$$\frac{s+7}{s^2+2s+5} = \frac{s+7}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{3\cdot 2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$f(t) = e^{-t}\cdot\cos(2t) + 3\cdot e^{-t}\sin(2t)$$

Aufgabe 9

a) 1) $\left(\frac{18}{20}\right)^5 \cdot \frac{2}{20} = 0.9^5 \cdot 0,1 = 0,059$

2) $\frac{\cancel{18}}{20} \cdot \frac{\cancel{17}}{19} \cdot \frac{\cancel{16}}{\cancel{18}} \cdot \frac{\cancel{15}}{\cancel{17}} \cdot \frac{14}{\cancel{16}} \cdot \frac{2}{\cancel{15}} = \frac{14 \cdot 2}{20 \cdot 19} \approx 0,074$

b) 1) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{r-1} \cdot \frac{2}{n}$

2) $\frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdot \frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{n-r+2-2}{\cancel{n-r+2}} \cdot \frac{2}{\cancel{n-r+1}}$

$= \frac{(n-r) \cdot 2}{n \cdot (n-1)}$

Aufgabe 10 (2 + 6 + 4 = 12 Punkte, davon bis zu 3 Enthaltungspunkte)

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu = 2$ und $\sigma = 0.5$.

a) Zeichnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten f_X und f_Y in ein (gemeinsames) Koordinatensystem.

b) Geben Sie in der folgenden Tabelle an, ob der linke Ausdruck <, = oder > dem rechten Ausdruck ist, oder tragen Sie „E" für Enthaltung ein.

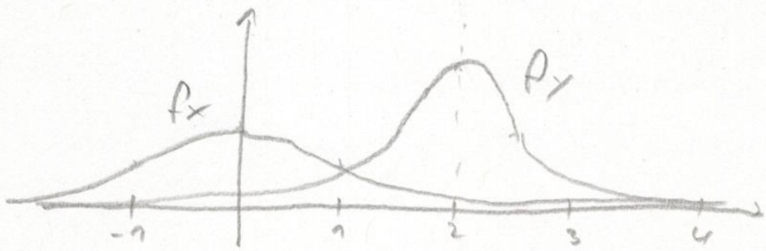
Jeder richtig Eintrag zählt 1 Punkt, eine Enthaltung 0.5 Punkte; Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	<, =, > oder „E"	
$P(X \in [-1,1])$	>	$P(X \in [0,2])$
$P(Y \in [-1,1])$	<	$P(Y \in [0,2])$
$P(X \in [1,2])$	<	$P(Y \in [1,2])$
$P(X \in [0,1])$	<	$P(Y \in [1,2])$
$P(X \in [0,2])$	=	$P(Y \in [1,2])$
$P(X \in [2,\infty[)$	=	$P(Y \in]-\infty,1]$

c) Geben Sie jeweils ein x_0 und ein y_0 an mit

$$P(X \leq x_0) = 0.8 \qquad \text{und} \qquad P(Y \leq y_0) = 0.8.$$

a)



c) $x_0 = \phi(0{,}8) \approx 0{,}84$

$y_0 = 2 + 0{,}5 \cdot 0{,}84 = 2{,}42$