Aufgabe 1

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-2xy\,e^{-x^2+4y},\ e^{-x^2+4y} + 4y\cdot e^{-x^2+4y}\right)$$

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - \frac{1}{5} \operatorname{grad} f(x_0, y_0)$$

$$= (2, 1) - \frac{1}{5}(-4, 5)$$

$$= \left(\frac{14}{5}, 0\right)$$

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) - \frac{1}{5} \operatorname{grad} f(x_1, y_1)$$

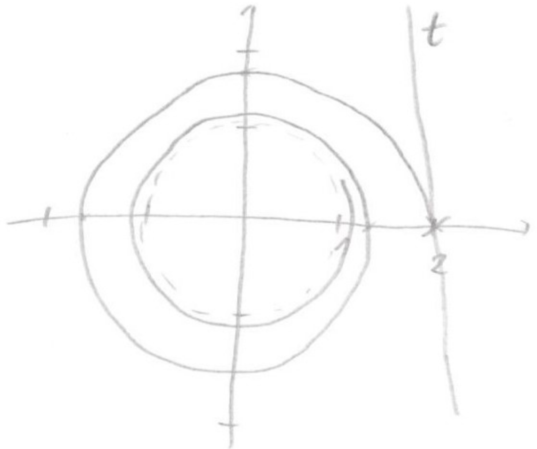
$$= (2{,}8 ; 0) - \frac{1}{5}\left(0, e^{-2{,}8^2}\right)$$

$$= \left(2{,}8 ; -\frac{1}{5} e^{-2{,}8^2}\right)$$

$$\approx (2{,}8 ; -7{,}87 \cdot 10^{-5})$$

Aufgabe 2

a)




b) $f'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}e^{-t/5} \cdot \cos t - (1+e^{-t/5})\sin t \\ -\frac{1}{5}e^{-t/5} \cdot \sin t + (1+e^{-t/5})\cos t \end{pmatrix}$

$t = \{ f(0) + \lambda \cdot f'(0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 3

$$\int_{[0,2]\times[a,b]} (x^2+y^3)\, d(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=a}^{b} (x^2+y^3)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left(x^2\cdot y + \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_a^b \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left(x^2\cdot b + \frac{1}{4}b^4 - \left(x^2 a + \frac{1}{4}a^4\right)\right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left(x^2\cdot (b-a) + \frac{1}{4}(b^4-a^4)\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3(b-a) + \frac{1}{4}\cdot(b^4-a^4)\cdot x\right)\Big|_{x=0}^{2}$$

$$= \frac{8}{3}(b-a) + \frac{1}{2}(b^4-a^4)$$

Aufgabe 4

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $r = 1,\ \vartheta = \pi/2 \Rightarrow \phi = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$: $r = 2,\ \vartheta = 0 \Rightarrow \phi = 2^2 \cos 0 = 4$

b) $$\vec{F}(r, \varphi, \vartheta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \vec{e_r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \cdot \vec{e_\varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e_\vartheta}$$
$$= 2r \cos \vartheta \cdot \vec{e_r} + 0 \cdot \vec{e_\varphi} + \frac{1}{r} \cdot (-r^2 \sin \vartheta) \cdot \vec{e_\vartheta}$$
$$= 2r \cos \vartheta \cdot \vec{e_r} - r \sin \vartheta \cdot \vec{e_\vartheta}$$

c) Wegen $\vec{F} = \operatorname{grad} \phi$ ist

$$\int \vec{F} d\vec{s} = \phi(\text{Endpunkt}) - \phi(\text{Anfangspunkt})$$
$$\overset{a)}{=} 4 - 0$$
$$= 4$$

**Aufgabe 5** (14 Punkte, davon 7 Enthaltungspunkte)

Sind die folgenden Aussagen zu Differenzialgleichungen (DGL) bzw. Anfangswertproblemen (AWP) richtig?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

Tipp für die ersten beiden Aussagen: Stellen Sie sich das Richtungsfeld vor!

| | gilt | gilt nicht | Enthaltung |
|---|---|---|---|
| Sämtliche Lösungen zur DGL $y' = x^2 \cdot y^2$ sind monoton wachsend. | X | | |
| Sämtliche Lösungen zur DGL $y' = x + y$ sind für $x > 0$ monoton wachsend. | | X | |
| Ist $y$ eine Lösung zur DGL $y' = x^2 \cdot y$, so ist auch $2 \cdot y$ eine Lösung der DGL. | X | | |
| Ist $y$ eine Lösung zur DGL $y' = x^2 \cdot y$, so ist auch $y + 1$ eine Lösung der DGL. | | X | |
| Zur DGL $y' = 1 - y$ gibt es eine Lösung, die konstant ist. | X | | |
| Mit dem Euler-Verfahren kann man zu einem AWP mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ nur den Lösungsverlauf für $x \geq x_0$ ermitteln. | | X | |
| Konvergiert beim Euler-Verfahren zu einem AWP der Wert von $y(x_{\text{end}})$ bei Schrittweite $\to 0$ gegen einen Wert $y_{\text{end}}$, so existiert die tatsächliche Lösung des AWP bis $x_{\text{end}}$ und hat dort den Wert $y_{\text{end}}$. | | X | |

Aufgabe 6

Da die DGL linear und homogen ist, sind

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x)$$
$$= c_1 \; x^2 + c_2 \; x^3$$

Lösungen. Wegen $y'(x) = 2c_1 x + 3c_2 x^2$ ergeben

die Anfangsbedingungen

$$1 = y(\;) = 4c_1 + 8c_2 \qquad \mathrm{I}$$
$$0 = y'(\;) = 4c_1 + 12c_2 \qquad \mathrm{II}$$

II − I liefert $4c_2 = -1 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{4}$

Damit in II: $c_1 = -3c_2 = -3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Lsg ist $y(x) = \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{4} x^3$

Aufgabe 7

a)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cdot e^{-jnx} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(1-jn)\cdot x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-jn} \cdot e^{(1-jn)x} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-jn} \left( e^{(1-jn)\cdot 2\pi} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1+jn}{1+n^2} \cdot \left( e^{2\pi} \cdot \underbrace{e^{-jn\cdot 2\pi}}_{=1} - 1 \right)$$

$$= \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi (1+n^2)} (1+jn)$$

b) Wegen $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

folgt $a_1 = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_1) = \dfrac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$

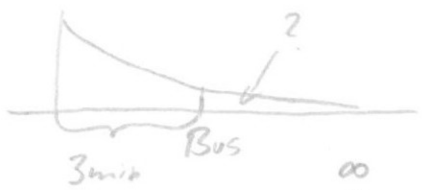
$$b_1 = -2 \, \mathrm{Im}(c_1) = -\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

Aufgabe 8

a) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}4\,\text{min}^{-1}} = 2{,}5\,\text{min}$

$\Rightarrow$ Mäxchen kommt im Durchschnitt 2,5 min zu spät

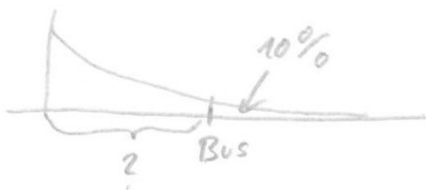
b)




$$P(X > 3\text{min}) = \int_{3\text{min}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{3\text{min}}^{\infty}$$

$$= 0 + e^{-0{,}4\text{min}^{-1} \cdot 3\text{min}} = e^{-1{,}2} \approx 0{,}3$$

c)



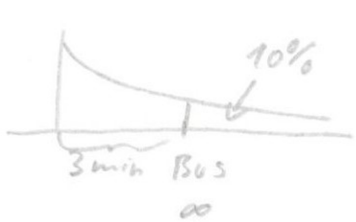

$$0{,}1 = \int_{T}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{T}^{\infty}$$

$$= 0 + e^{-\lambda \cdot T}$$

$$\Leftrightarrow \ln 0{,}1 = -\lambda \cdot T \Leftrightarrow T = -\frac{\ln 0{,}1}{0{,}4\,\text{min}^{-1}} = 5{,}76\,\text{min}$$

Er sollte ca. 5,76 Minuten planen.

d)




$$0{,}1 = \int_{3\text{min}}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{3\text{min}}^{\infty} = e^{-\lambda \cdot 3\text{min}}$$

$$\Leftrightarrow \ln 0{,}1 = -\lambda \cdot 3\text{min} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}1}{3\text{min}} \approx 0{,}77\,\text{min}^{-1}$$

Aufgabe 9

a) $\bar{x} = \frac{1}{9}(4\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 5 + 1\cdot 6 + 1\cdot 15)$

$= 4$

$s^2 = \frac{1}{8}(4\cdot(1-4)^2 + 2\cdot(3-4)^2 + 1\cdot(5-4)^2 + 1\cdot(6-4)^2 + 1\cdot(15-4)^2)$

$= \frac{1}{8}(4\cdot 9 + 2\cdot 1 + 1 + 4 + 121)$

$= 20{,}5$

$\Rightarrow s = \sqrt{20{,}5} \approx 4{,}53$

Median: $x_m = 3$

b) b1) ja, z.B bei $x_{10} = 150$. Dann ist

$\bar{x} = \frac{1}{10}(\ldots + 150) > 15$

b2) nein. Der Median bei 10 Beobachtungen bleibt maximal 3.