Aufgabe 1 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Welche der vier in den unteren Teilen angegebenen Funktionen entspricht der oberen Funktion? Dabei bedeuten

- die Variablen x, y und z eine Angabe in karthesischen Koordinaten,
- die Variablen ϱ, φ und z eine Angabe in Zylinderkoordinaten,
- die Variablen r, φ und ϑ eine Angabe in Kugelkoordinaten.

Kreuzen Sie die richtie Funktion (4 Punkte) oder „Enthaltung" (2 Punkte) an!

$f(r,\varphi,\vartheta) \;=\; r^2\cos\vartheta$	
$f(x,y,z) \;=\; (x^2+y^2+z^2)\cdot z$	
$f(x,y,z) \;=\; (x^2+y^2)\cdot z$	
$f(x,y,z) \;=\; \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot z$	X
$f(x,y,z) \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\cdot z$	
Enthaltung	

$f(\varrho,\varphi,z) \;=\; \varrho^2\cdot z$	
$f(x,y,z) \;=\; (x^2+y^2+z^2)\cdot z$	
$f(x,y,z) \;=\; (x^2+y^2)\cdot z$	X
$f(x,y,z) \;=\; \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot z$	
$f(x,y,z) \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\cdot z$	
Enthaltung	

$f(x,y,z) \;=\; x^2+y^2+2z^2$	
$f(\varrho,\varphi,z) \;=\; \varrho^2+\varphi^2+2z^2$	
$f(\varrho,\varphi,z) \;=\; 2\varrho^2+2\varphi^2$	
$f(\varrho,\varphi,z) \;=\; \varrho^2+2z^2$	X
$f(\varrho,\varphi,z) \;=\; \varphi^2+2z^2$	
Enthaltung	

$f(x,y,z) \;=\; x^2+y^2+2z^2$	
$f(r,\varphi,\vartheta) \;=\; r^2\cdot(1+\cos^2\varphi)$	
$f(r,\varphi,\vartheta) \;=\; r^2\cdot(1+\sin^2\varphi)$	
$f(r,\varphi,\vartheta) \;=\; r^2\cdot(1+\cos^2\vartheta)$	X
$f(r,\varphi,\vartheta) \;=\; r^2\cdot(1+\sin^2\vartheta)$	
Enthaltung	

Aufgabe 2

$$\operatorname{grad} f(2;1;-1)$$

$$\approx \left(\frac{f(2{,}1;1;-1) - f(2;1;-1)}{0{,}1} ; \frac{f(2;1{,}1;-1) - f(2;1;-1)}{0{,}1} ; \frac{f(2;1;-0{,}9) - f(2;1;-1)}{0{,}1} \right)$$

$$= (4{,}1 ; 13{,}24 ; -13{,}756)$$

Aufgabe 3

$$d(\lambda,\mu) = \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix}\mu\\-2\lambda+\mu\\-6+\lambda\end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\mu^2 + (-2\lambda+\mu)^2 + (-6+\lambda)^2}$$

$$= \sqrt{\underline{\mu^2} + 4\lambda^2 - 4\lambda\mu + \underline{\mu^2} + 36 - 12\lambda + \underline{\lambda^2}}$$

$$= \sqrt{2\mu^2 + 5\lambda^2 - 4\lambda\mu - 12\lambda + 36}$$

Kandidaten für Minstellen:

$$(0,0) \overset{!}{=} d'(\lambda,\mu) = \left(\frac{10\lambda - 4\mu - 12}{2\sqrt{\dots}}, \frac{4\mu - 4\lambda}{2\sqrt{\dots}} \right)$$

$\Leftrightarrow \quad 5\lambda - 2\mu - 6 = 0 \quad$ und $\quad \mu = \lambda$

$\Leftrightarrow \quad 3\lambda = 6 \quad$ und $\quad \mu = \lambda$

$\Leftrightarrow \quad \mu = \lambda = 2$

Als einziger Kandidat ist dies die Minstelle.

also ist der gesuchte Punkt Q

$$\vec{q} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Betrachtet werden die folgenden beiden möglichen Symmetrie-Eigenschaften:

(1) $f(x, -y) \;=\; f(x, y)$,

(2) $f(x, -y) \;=\; -f(x, y)$.

Welche der folgenden Aussagen sind bei den entsprechenden Symmetrie-Eigenschaften richtig bzw. falsch?

Kreuzen Sie den richtigen Eintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	falls (1) gilt			falls (2) gilt		
	richtig	falsch	Enth.	richtig	falsch	Enth.
$\displaystyle\int_{[0,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \;=\; 0$		X		X		
$\displaystyle\int_{[-1,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \;=\; 0$		X			X	
$\displaystyle\int_{[0,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \;=\; 2\cdot\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$	X				X	
$\displaystyle\int_{[-1,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \;=\; \int_{[0,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$		X			X	

Aufgabe 5

$$\iint \vec{F}\, d\vec{A} = \iiint \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (2x + x + 2yz)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} (3xz + yz^2)\Big|_{z=0}^{1} dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} (3x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(3xy + \frac{1}{2}y^2\right)_{y=0}^{1} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(3x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\Big|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

Aufgabe 6

$$y_1'(1) = 1 \cdot y_2(1) = 1 \cdot 0 = 0$$
$$y_2'(1) = y_1(1) + y_2(1) = 2 + 0 = 2$$

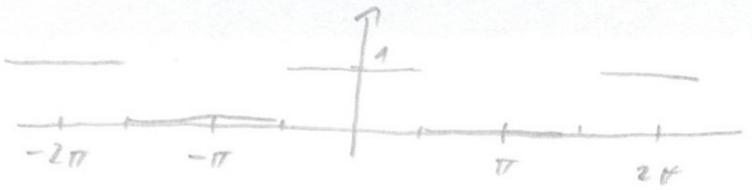
$$\Rightarrow \quad y_1(1{,}1) \approx y_1(1) + 0{,}1 \cdot y_1'(1) \approx 2 + 0{,}1 \cdot 0 = 2$$
$$y_2(1{,}1) \approx y_2(1) + 0{,}1 \cdot y_2'(1) \approx 0 + 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2$$

$$\Rightarrow \quad y_1'(1{,}1) = 1{,}1 \cdot y_2(1{,}1) \approx 1{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}22$$
$$y_2'(1{,}1) = y_1(1{,}1) + y_2(1{,}1) \approx 2 + 0{,}2 = 2{,}2$$

$$\Rightarrow \quad y_1(1{,}2) \approx y_1(1{,}1) + 0{,}1 \cdot y_1'(1{,}1) \approx 2 + 0{,}1 \cdot 0{,}22 = 2.022$$
$$y_2(1{,}2) = y_2(1{,}1) + 0{,}1 \cdot y_2'(1{,}1) = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 2{,}2 = 0{,}42$$

Aufgabe 7

a)



f gerade $\Rightarrow$ alle $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

Für $n > 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Es ist $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{2}{3\pi}$,

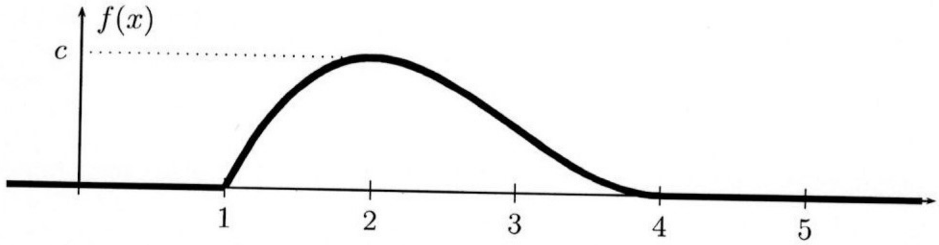
$\Rightarrow$ FR: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(x) - \frac{2}{3\pi} \cos(3x) + -$

c1) da $\frac{\pi}{4}$ Stetigheitsstelle von f ist: FR = Fktwert = 1

c2) da $\frac{\pi}{2}$ Sprungstelle von f (von 1 auf 0): $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 8 (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable, die Werte im Intervall $[1; 4]$ annimmt, und die die im Bild skizzierte Dichte $f(x)$ (mit Maximalwert c an der Stelle 2) besitzt.



Markieren Sie den jeweils richtigen (gerundeten) Zahlenwert für die angegebenen Größen (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt).

Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

c	
0.25	
0.59	X
1	
1.33	
Enth.	

$P(X < 2)$	
0.4	X
0.5	
0.6	
1	
Enth.	

$P(X = 2)$	
0	X
c	
0.5	
1	
Enth.	

E(X)	
2	
2.2	X
2.5	
2.7	
Enth.	

Std.abw. von X	
0.1	
0.6	X
1.8	
2	
Enth.	

Aufgabe 9

a) $E(X) = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 = 1.8$

$V(X) = 0.8^2 \cdot 0.5 + 0.2^2 \cdot 0.2 + 1.2^2 \cdot 0.3$

$= 0.76$

$\Rightarrow$ Stdabw. $= \sqrt{V(X)} \approx 0.87$

b) W(Summe = 4) = W(beide „2" oder eines „1", eines „3")

= W((2,2) oder (1,3) oder (3,1))

$= 0.2^2 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.5$

$= 0.34$

c) W(höchstens 3 Versuche bis zur ersten „1")

= 1 − W(3 mal keine 1)

$= 1 - 0.5^3$

$= 0.875$