Aufgabe 1

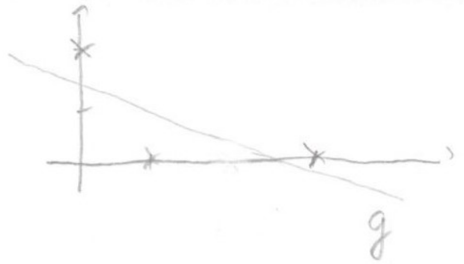
a) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, $\vartheta = \pi/2$

b) $\vec{F}(x) = \sin(\frac{3}{4}\pi) \cdot \vec{e}_r + \cos(\frac{3}{4}\pi) \cdot \vec{e}_\varphi + \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \vec{e}_\vartheta$

$= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \vec{e}_r + (-\sqrt{\frac{1}{2}}) \cdot \vec{e}_\varphi + \sqrt{2} \cdot \vec{e}_\vartheta$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 1



$$d(a,m) = (g(0)-2)^2 + (g(1)-0)^2 + (g(3)-0)^2$$
$$= (a-2)^2 + (m+a)^2 + (3m+a)^2$$
$$= a^2 - 4a + 4 + m^2 + 2am + a^2 + 9m^2 + 6am + a^2$$
$$= 3a^2 - 4a + 4 + 10m^2 + 8am$$

Kandidaten für Minimalstelle:

$$(0,0) \overset{!}{=} \operatorname{grad} d(a,m)$$
$$= (6a - 4 + 8m\,,\ 20m + 8a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 6a + 8m = 4 \\ 8a + 20m = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3a + 4m = 2 \\ a = -\frac{20}{8} m = -\frac{5}{2} m \end{array}$$

$$\Leftrightarrow a = -\tfrac{5}{2} m \text{ und } \underbrace{3 \cdot \left(-\tfrac{5}{2} m\right) + 4m = 2}$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{7}{2} m = 2 \Leftrightarrow m = -\tfrac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow a = -\tfrac{5}{2} \cdot \left(-\tfrac{4}{7}\right) = \tfrac{10}{7} \text{ und } m = -\tfrac{4}{7}$$

Als einziger Kandidat ist dies die Minstelle

$$\Rightarrow g(x) = -\tfrac{4}{7} x + \tfrac{10}{7}$$

Aufgabe 3

a) $f(r,\varphi) = (r\cdot\cos\varphi)^2\cdot(r\sin\varphi)$

$= r^3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$

b) $\int_D f(x,y)\,d(x,y) = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi} f(r,\varphi)\cdot r\,d\varphi\,dr$

$= \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi} r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\cdot r\,d\varphi\,dr$

$= \int_{r=0}^{1} r^4\,dr\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi$

$= \frac{1}{5}r^5\Big|_0^1\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi}$

$= \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}(-1)^3+\frac{1}{3}\cdot 1^3\right)$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}$

$= \frac{2}{15}$

Aufgabe 4

$$\int \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_0^2 \vec{F}(t^2, 1, e^t) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t^2 \cdot e^t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 (2t + 0 + e^t)\, dt$$

$$= (t^2 + e^t) \Big|_0^2$$

$$= 4 + e^2 - \underbrace{e^0}_{=1}$$

$$= 3 + e^2 \approx 10{,}389.$$

Aufgabe 5 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Betrachtet wird

(I) eine inhomogene lineare Differenzialgleichung

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y \;=\; f(x) \qquad (f(x) \neq 0),$$

(H) die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y \;=\; 0.$$

Seien $y_{s,1}$ und $y_{s,2}$ Lösungen von (I) und $y_{h,1}$ und $y_{h,2}$ Lösungen von (H).

Sind die in der Tabelle genannten Funktionen Lösungen von (I), (H) oder von keinem von beiden? Kreuzen Sie die richtige Antwort (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an.

	ist Lösung von			Enthal-tung
	(I)	(H)	keinem von beiden	
$y = y_{h,1} + y_{h,2}$		X		
$y = y_{s,1} + y_{s,2}$			X	
$y = y_{h,1} - y_{h,2}$		X		
$y = y_{s,1} - y_{s,2}$		X		
$y = \frac{1}{2}(y_{h,1} + y_{h,2})$		X		
$y = \frac{1}{2}(y_{s,1} + y_{s,2})$	X			
$y = y_{h,1} + y_{s,1} - y_{s,2}$		X		
$y = y_{s,1} + y_{h,1} - y_{h,2}$	X			

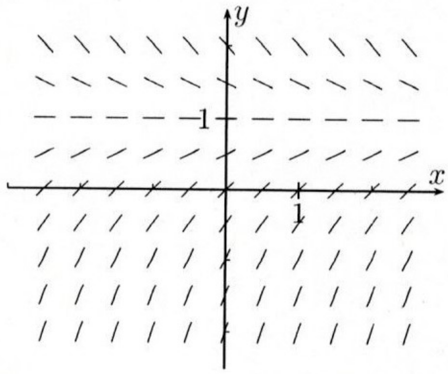
Aufgabe 6 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Zu welcher Differenzialgleichung gehört das nebenstehende Richtungsfeld?

Kreuzen Sie die richtige Antwort (4 Punkte) oder „Enthaltung“ (2 Punkte) an.

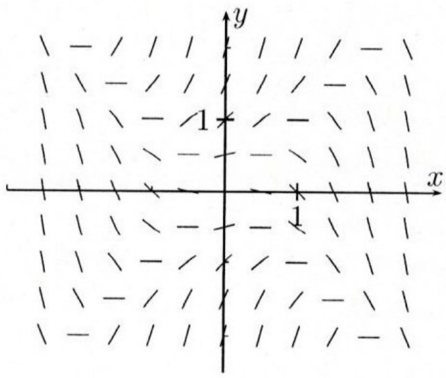
a)

$y' = 1 - x$	
$y' = 1 - y$	X
$y' = 1 - x^2$	
$y' = 1 - y^2$	
Enthaltung	



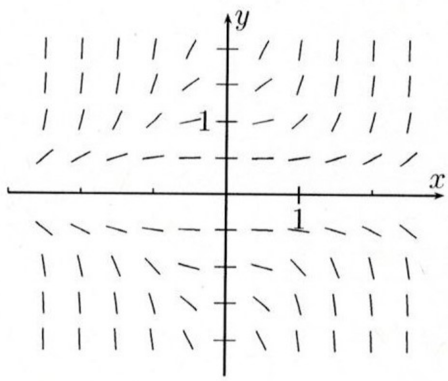
b)

$y' = x - y$	
$y' = y - x$	
$y' = x^2 - y^2$	
$y' = y^2 - x^2$	X
Enthaltung	



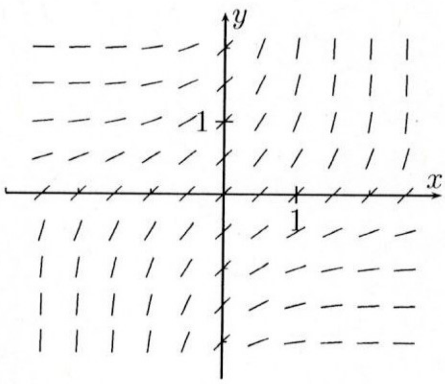
c)

$y' = x^2 \cdot y^2$	
$y' = x^2 \cdot y^3$	X
$y' = x^3 \cdot y^2$	
$y' = x^3 \cdot y^3$	
Enthaltung	



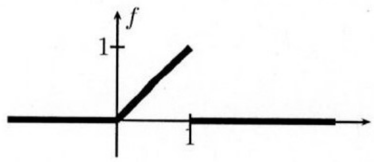
d)

$y' = e^{x+y}$	
$y' = e^{xy}$	X
$y' = \dfrac{1}{e^{x+y}}$	
$y' = \dfrac{1}{e^{xy}}$	
Enthaltung	



Aufgabe 7 (9 Punkte)

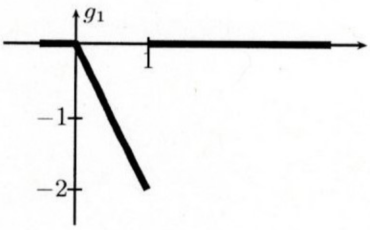
Die Laplace-Transformation zur abgebildeten Funktion f lautet



$$F(s) \;=\; \frac{1-(s+1)\cdot e^{-s}}{s^2}.$$

Geben Sie die Laplace-Transformationen zu den wie folgt dargestellten Funktionen g_i an. (Sie brauchen die entstehenden Ausdrücke nicht zu vereinfachen.)

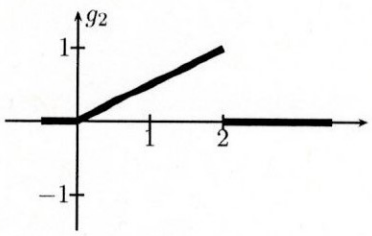
a)



$$G_1(s) = -2\cdot F(s)$$
$$= -2\cdot \frac{1-(s+1)\cdot e^{-s}}{s^2}$$

$[g_2(t) = f(\tfrac{t}{2})]$

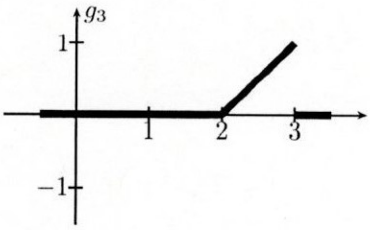
b)



$$G_2(s) = 2\cdot F(2s)$$
$$= 2\cdot \frac{1-(2s+1)\cdot e^{-2s}}{(2s)^2}$$

$[g_3(t) = f(t-2)]$

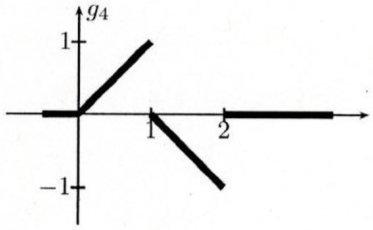
c)



$$G_3(s) = e^{-s\cdot 2}\cdot F(s)$$
$$= e^{-2s}\cdot \frac{1-(s+1)\cdot e^{-s}}{s^2}$$

$[g_4(t) = f(t) - f(t-1)]$

d)



$$G_4(s) = F(s) - e^{-s}\cdot F(s)$$
$$= \frac{1-(s+1)\cdot e^{-s}}{s^2}$$
$$- e^{-s}\,\frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2}$$

Aufgabe 8

$$P(W1 > W2)$$

$$= P(W1 = 2 \text{ und } W2 = 1)$$

$$+ P(W1 = 4 \text{ und} (W2 = 1 \text{ oder } W2 = 3))$$

$$+ P(W1 = 6)$$

$$= P(W1=2) \cdot P(W2=1)$$

$$+ P(W1=4) \cdot (P(W2=1) + P(W2=3))$$

$$+ P(W1=6)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$+ \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{2}{8} + \frac{3}{8} \right)$$

$$+ \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{15}{64} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4 + 15 + 16}{64} = \frac{35}{64}$$

Aufgabe 9

a) $W(\text{in } [47g; 53g]) = \phi(1{,}5) - \phi(-1{,}5)$

$= \phi(1{,}5) - (1 - \phi(1{,}5))$

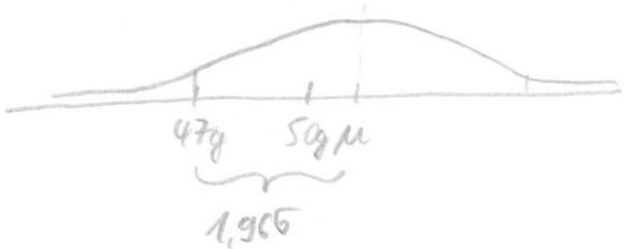
$= 2 \cdot \phi(1{,}5) - 1$

$= 2 \cdot 0{,}93319 - 1$

$= 0{,}86638$

b) $1{,}96\,\sigma = 3g \Rightarrow \sigma = \frac{3g}{1{,}96} \approx 1{,}53$

c)



$\mu = 47g + 1{,}96 \cdot 1{,}7g = 50{,}332\,g$