Aufgabe 1 (12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

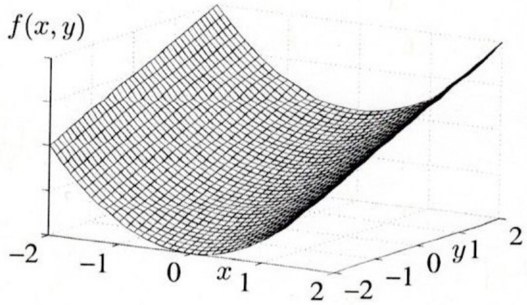
Welche Funktion erzeugt das nebenstehende „Funktionsgebirge“?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

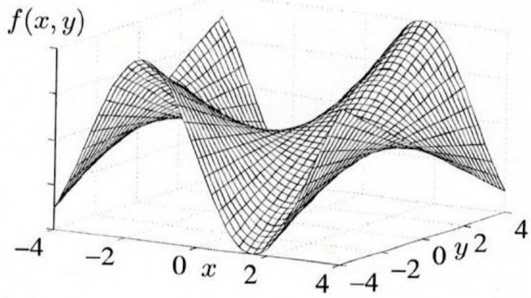
a)

$f(x,y) = x^2 + y$	X
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	
$f(x,y) = x + y^2$	
$f(x,y) = x \cdot y^2$	
Enthaltung	



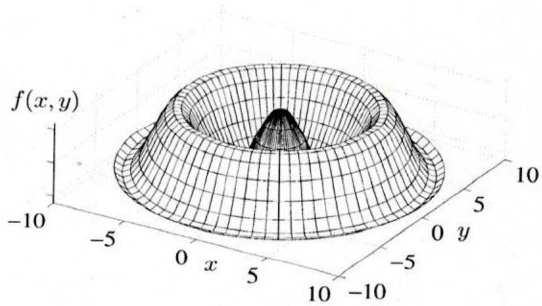
b)

$f(x,y) = \sin(x) + y$	
$f(x,y) = \sin(x) \cdot y$	X
$f(x,y) = x + \sin(y)$	
$f(x,y) = x \cdot \sin y$	
Enthaltung	



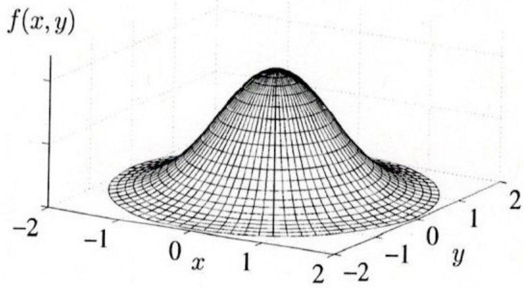
c)

$f(x,y) = \cos(x+y)$	
$f(x,y) = \cos(xy)$	
$f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}$	X
$f(x,y) = \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y}$	
Enthaltung	



d)

$f(x,y) = \sqrt{e^{-x^2} + e^{-y^2}}$	
$f(x,y) = e^{-(x+y)}$	
$f(x,y) = e^{-xy}$	
$f(x,y) = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$	X
Enthaltung	



Aufgabe 2

a) $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x, 6y)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6x_0 \\ 6y_0 \end{pmatrix} = (1-6\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

c) Es ist $$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 6y_1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-6\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (1-6\lambda)\cdot(1-6\lambda) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= (1-6\lambda)^2 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

d) d1) $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (1-6\lambda)^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

d2) $\lambda \in \left]0 ; \frac{1}{6}\right[$

Aufgabe 3

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} \frac{y}{(c+xy)^2}\, d(x,y)$$

$$= \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} \frac{y}{(c+xy)^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\frac{1}{c+xy} \Big|_{x=0}^{1} \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \left(-\frac{1}{c+y} + \frac{1}{c} \right) dy$$

$$= \left(-\ln|c+y| + \frac{1}{c}\cdot y \right) \Big|_{y=0}^{2}$$

$$= -\ln|c+2| + \frac{2}{c} + \ln|c|$$

Aufgabe 4

a) $$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \cdot e^{yz} \\ x \cdot e^{yz} + xyz \cdot e^{yz} \\ xy^2 e^{yz} \end{pmatrix}$$

b) $\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \vec{0}$

c) Da φ ein Potenzial zu $\vec{F}$ ist, ist

$$\begin{aligned} \int \vec{F}\, d\vec{r} &= \varphi(\vec{r}(1)) - \varphi(\vec{r}(0)) \\ &= \varphi(1,2,1) - \varphi(0,2,0) \\ &= 2 \cdot e^2 - 0 \\ &= 2 \cdot e^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Das char. Pol. ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ mit Nst 1 und 3, d.h.
die allg. Lsg. ist $y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{3x}$

$$y'(x) = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}$$

Die AB führen zu

$$1 = c_1 + c_2 \quad \mathrm{I}$$
$$-1 = c_1 + 3c_2 \quad \mathrm{II}$$

II−I liefert $-2 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = -1$, in I eingesetzt $1 = c_1 - 1$
$\Rightarrow c_1 = 2$.

$\Rightarrow$ Lsg. ist $y(x) = 2e^x - e^{3x}$

b) Eine Laplace-Trafo liefert mit $y \circ\!\!-\!\!\bullet \, Y(s)$

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 1 - (-1) - 4 \cdot (s \cdot Y(s) - 1) + 3 \cdot Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2 - 4s + 3)\, Y(s) = s - 1 - 4 = s - 5$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s-5}{s^2-4s+3}$$

Part.-Bruch-Zerlegung liefert mit den Nst 1 und 3 den Ansatz

$$\frac{s-5}{s^2-4s+3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3) + B(s-1)}{(s-1)(s-3)}$$

$s = 1$ in den Zählern liefert $1 - 5 = A \cdot (-2) \Rightarrow A = 2$

$s = 3$ " " " " $3 - 5 = B \cdot 2 \Rightarrow B = -1$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{-1}{s-3}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2 \cdot e^t - e^{3t}$$

Aufgabe 6

a) Es ist $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{= \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)} dt$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t)\, dt$$

Damit ist

$$\operatorname{Re} F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(-\omega t)\, dt$$

|| cos ist gerade

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t)\, dt = \operatorname{Re} F(\omega),$$

also ist Re F gerade

b) Es ist $\operatorname{Im} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t)\, dt$

Ist f gerade, so ist $f(t) \cdot \sin(\omega t)$ ungerade und das gesamte Integral daher gleich Null.

Aufgabe 7

a) $E(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 = 3{,}6$

$V(X) = (1-3{,}6)^2 \cdot 0{,}3 + (3-3{,}6)^2 \cdot 0{,}1 + (5-3{,}6)^2 \cdot 0{,}6$

$= 2{,}6^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}1 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}6$

$= 3{,}24$

Stdabw $= \sqrt{V(X)} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$

b) W(höchstens 3 Versuche)

= P(beim ersten Mal 1)

+ P(beim zweiten Mal erste 1)

+ P(" dritten " " ")

$= 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}3$

$= 0{,}657$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Mit $P_{\mu,\sigma}(\,]a,b[\,)$ wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ einen Wert im Intervall $]a,b[$ annimmt.

Geben Sie in der folgenden Tabelle den jeweils fehlenden Wert so an, dass $P_{\mu,\sigma}(\,]a,b[\,)$ gleich der links dargestellten Wahrscheinlichkeit ist.

	μ	σ	a	b
$P_{3,2}(\,]3,7[\,)$	0	1	0	2
$P_{0,1}(\,]-1,2[\,)$	3	2	1	7
$P_{-1,2}(\,]-1,3[\,)$	0	3	0	6
$P_{0,1}(\,]2,\infty[\,)$	6	2	$-\infty$	2