Aufgabe 1 (10 + 10 = 20 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle (bzgl. des Ursprungs) rotationssymmetrischen differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
$f(0,0) = 0$		X	
$f(2,1) = f(1,2)$	X		
$f(1,1) = f(2,0)$		X	
$f(3,4) = f(5,0)$	X		
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0) = 0$.		X	
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, 0) = 0$.	X		
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.	X		
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ steht $\operatorname{grad} f(\vec{x})$, senkrecht auf $\vec{x}$.		X	
Für den Kreis K_1 um den Ursprung mit Radius 1 gilt $\int_{K_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$.		X	
Für $D_1 = [0,1] \times [0,1]$ und $D_2 = [-1,0] \times [0,1]$ gilt $\int_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.	X		

Aufgabe 2

a) $$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2z \\ e^{xy}+xye^{xy} & x^2e^{xy} & 0 \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

b) Gesucht: $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ mit $J_f(1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = -f(1,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1-2 \\ 1+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \Delta x = 1 \;,\; \Delta x + \Delta y = -2 \;,\; \Delta z = -1$

$\Rightarrow \Delta y = -3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) Wegen $x = r \cdot \cos \varphi$ in Polarkoordinaten ist

$$f(r,\varphi) = (r \cdot \cos \varphi)^2 = r^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

b) $$\int_{K_2} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_{r=0}^{2} r^3 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

$$= 4 \cdot \pi$$

$$= 4\pi$$

Aufgabe 4 ($6 + 6 = 12$ Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei

- A der Einheitskreis in der (x, y)-Ebene und
- $\vec{r}$ ein Weg, der ausgehend von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ diesen Einheitskreis in der (x, y)-Ebene umrandet.

Gelten bzgl. dieser Fläche A bzw. dieses Weges $\vec{r}$ die folgenden Aussagen für alle Vektorfelder

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} ?$$

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

		gilt	gilt nicht	Enthaltung
Wenn überall $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{A} = 0$		X	
	$\int \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r} = 0$		X	
Wenn überall $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{A} = 0$		X	
	$\int \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r} = 0$	X		
Wenn überall $F_3 = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{A} = 0$	X		
	$\int \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r} = 0$		X	

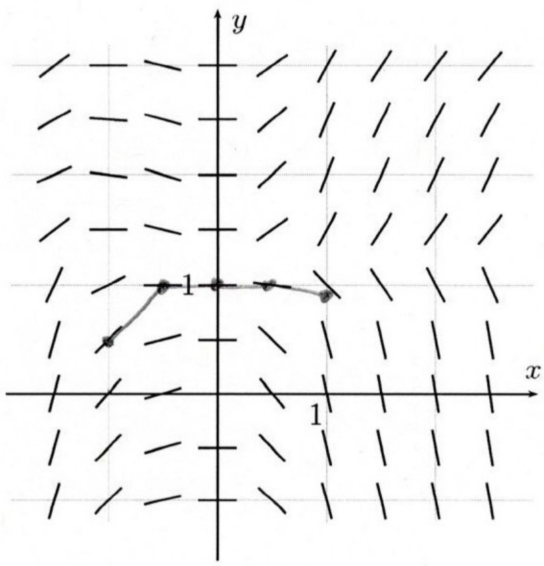
Aufgabe 5 $(2 + 2 = 4$ Punkte$)$

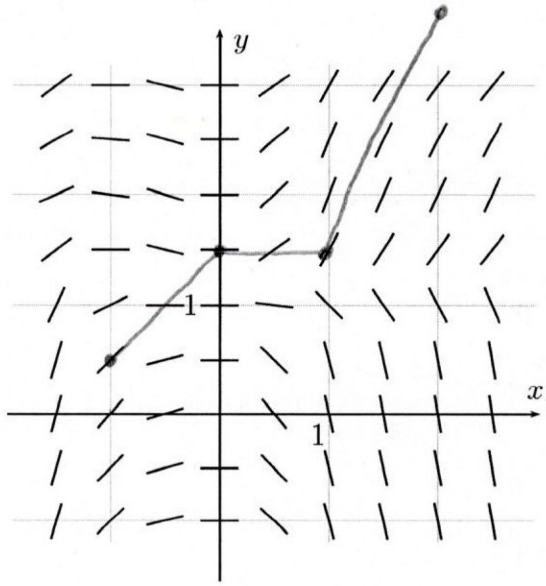
Gegeben ist das abgebildete Richtungsfeld zu einer Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$.

Gesucht sind approximative Lösungsverläufe zur Anfangsbedingung $y(-1) = 0.5$.

a) Zeichnen Sie in das linke Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch vier Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 0.5 erhält.

b) Zeichnen Sie in das rechte Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch drei Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 1 erhält.





Aufgabe 6

Betr. $y'' + 2y' + y = 5 \cdot e^{j \cdot 2t}$, anschl. Imaginärteil.

Ansatz: $y(t) = c \cdot e^{j \cdot 2t}$

$y'(t) = 2jc\, e^{j \cdot 2t}$

$y''(t) = -4c\, e^{j2t}$

Einsetzen: $-4c \cdot e^{j2t} + 2 \cdot 2jc \cdot e^{j2t} + c \cdot e^{j \cdot 2t} = 5 \cdot e^{j \cdot 2t}$

$\Rightarrow \quad c \cdot (-4 + 4j + 1) = 5$

$\Rightarrow \quad c = \frac{5}{-3+4j} = \frac{5 \cdot (-3-4j)}{3^2+4^2} = \frac{5}{25}(-3-4j)$

$= -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j$

$\Rightarrow$ Lsg ist $y(t) = \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j\right) \cdot e^{j \cdot 2t}\right)$

$= \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j\right) \cdot \left(\cos(2t) + j \cdot \sin(2t)\right)\right)$

$= -\frac{3}{5} \sin(2t) - \frac{4}{5} \cdot \cos(2t)$

Aufgabe 7

Da f offensichtlich ungerade ist, sind alle $a_n = 0$.

Zur Berechnung der b_n nutze das Intervall $[-\pi;\pi]$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \sin(nx)}_{\text{gerade Fkt}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{n} \cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(n \cdot \pi/2)}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi \cdot n} \left(1 - \cos(n \cdot \tfrac{\pi}{2}) \right)$$

also $b_1 = \frac{2}{\pi} \cdot (1-0) = \frac{2}{\pi}$

$b_2 = \frac{2}{\pi \cdot 2} (1-(-1)) = \frac{2}{\pi}$

$b_3 = \frac{2}{\pi \cdot 3} (1-0) = \frac{2}{3\pi}$

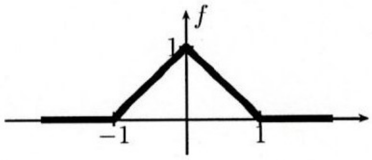
$b_4 = \frac{2}{\pi 4} (1-1) = 0$

$b_5 = \frac{2}{\pi \cdot 5} (1-0) = \frac{2}{5\pi}$

$\Rightarrow$ FR: $\frac{2}{\pi} \cdot \sin x + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(2x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \ldots$

Aufgabe 8 (3 + 3 = 6 Punkte)

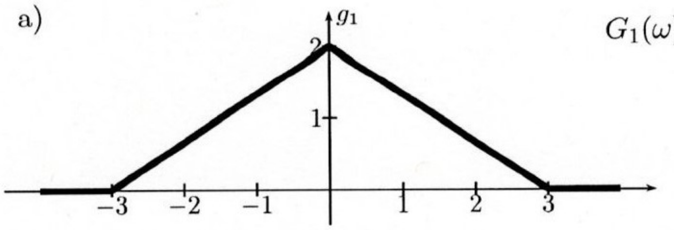
Die Fouriertransformation zu der abgebildeten Dreiecksfunktion f lautet



$$F(\omega) \;=\; 2 \cdot \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

Geben Sie die Fouriertransformationen zu den wie folgt dargestellten Funktionen g_i an.

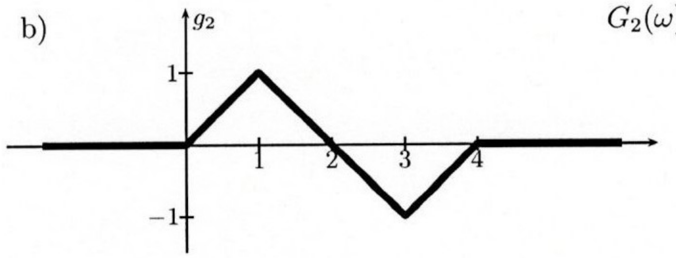
a)



$g_1(t) = 2 \cdot f\left(\frac{1}{3} t\right)$

$$G_1(\omega) \;=\; 2 \cdot 3 \cdot F(3 \cdot \omega) = 6 \cdot 2 \cdot \frac{1 - \cos(3\omega)}{(3\omega)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 - \cos(3\omega)}{\omega^2}$$

b)



$g_2(t) = f(t-1) - f(t-3)$

$$G_2(\omega) \;=\; e^{-j\omega} F(\omega) + e^{-j\omega \cdot 3} \cdot F(\omega) = \left(e^{-j\omega} + e^{-j\omega \cdot 3}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2}$$

Aufgabe 9

a) Es muss gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^3}\,dx = c \cdot \frac{-1}{2} x^{-2} \Big|_1^{\infty}$$

$$= c \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} c$$

$\Rightarrow c = 2$

b) $$P([2;3]) = \int_{2}^{3} \frac{2}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x^2}\Big|_2^3 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-4+9}{36} = \frac{5}{36} \approx 0{,}14$$

c) $$0{,}5 = \int_{-\infty}^{x_{0,5}} f(x)\,dx = \int_{1}^{x_{0,5}} \frac{2}{x^3}\,d_{\text{ }} = -\frac{1}{x^2}\Big|_1^{x_{0,5}}$$

$$= -\frac{1}{x_{0,5}^2} + 1$$

$\Rightarrow \frac{1}{x_{0,5}^2} = 0{,}5 \quad \Rightarrow x_{0,5}^2 = 2 \quad \Rightarrow x_{0,5} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

d) $$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\,dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 + 2 = 2$$