Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die Punkte P_1 und P_2 sollen in kartesischen, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten dargestellt werden. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben.

	kart.-KO	Zylinder-KO	Kugel-KO
P_1	$x = 2$ $y = 2$ $z = 0$	$\rho = \sqrt{8}$ $\varphi = \pi/4$ $z = 0$	$r = \sqrt{8}$ $\varphi = \pi/4$ $\vartheta = \pi/2$
P_2	$x = -1$ $y = 0$ $z = 1$	$\rho = 1$ $\varphi = \pi$ $z = 1$	$r = \sqrt{2}$ $\varphi = \pi$ $\vartheta = \pi/4$

Aufgabe 2

a) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \cdot e^{xy} & e^{xy} + xy \cdot e^{xy} \\ -y^2 & 2xy \\ 6(3x+y) & 2(3x+y) \end{pmatrix}$

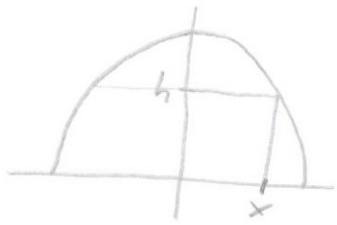
b) $f(0{,}05;\, 0{,}9) \approx f(0,1) + J_f(0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}05 \\ 1{,}1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

In Höhe h erhält man einen quadratischen Querschnitt mit Seitenlänge s.



Dabei gilt für $x = \frac{s}{2}$:

$$h = 2 - \frac{8}{9} x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{9} x^2 = 2 - h$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{9}{8}(2-h)}$$

also $s(h) = 2 \cdot x = 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}(2-h)}$

Die Querschnittsfläche ist also $(s(h))^2$ und damit

$$V = \int_0^2 (s(h))^2 \, dh = \int_0^2 \left(2 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}(2-h)}\right)^2 dh$$

$$= \int_0^2 4 \cdot \frac{9}{8}(2-h) \, dh$$

$$= \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{2}(2-h)^2 \Big|_0^2\right) = \frac{9}{2}\left(0 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = 9$$

Aufgabe 4

a) Es ist

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2+bx) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^3+cyz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^d)$$

$$= 2axy^2+b+3xy^2+cz^3+d\cdot z^{d-1}$$

$$= (2a+3)xy^2+b+cz^3+d\cdot z^{d-1}$$

Für $a=-\frac{3}{2}$, $b=5$, $d=4$ und $c=-4$ ist also

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 5.$$

b) Nach dem Integralsatz von Gauß ist

$$\iint \vec{F}\, d\vec{A} = \iiint_{K_2} \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{=5}\, dV$$

$$= 5 \cdot \text{Volumen von } K_2$$

$$= 5 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$$

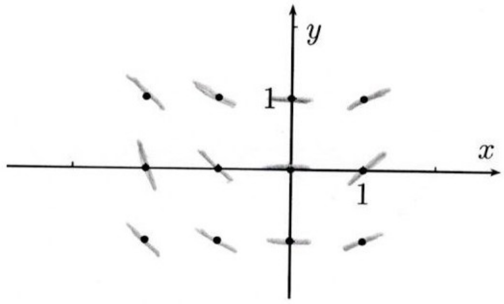
$$= \frac{160}{3}\pi$$

Aufgabe 5 (4 + 6 = 10 Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x}{y^2+1}.$$

a) Zeichnen Sie in das Diagramm an den markierten zwölf Punkten ($x = -2, -1, 0, 1$, $y = -1, 0, 1$) die Richtungselemente für das Richtungsfeld der Differenzialgleichung.



b) Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems mit $y(-2) = 1$ zu der Differenzialgleichung, Schrittweite 0.5, aus.

$$y(-1{,}5) \approx y(-2) + 0{,}5 \cdot \underbrace{y'(-2)}$$

$$= \frac{-2}{(y(-2))^2+1} = \frac{-2}{1+1} = -1$$

$$= 1 + 0{,}5 \cdot (-1) = 0{,}5$$

$$y(-1) \approx y(-1{,}5) + 0{,}5 \cdot \underbrace{y'(-1{,}5)}$$

$$= \frac{-1{,}5}{(y(-1{,}5))^2+1} \approx \frac{-1{,}5}{0{,}25+1} = -1{,}2$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}5 \cdot (-1{,}2)$$

$$= -0{,}1$$

Aufgabe 6

Das char. Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$

mit Nullstellen $\lambda = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm j$

Damit erhält man als Lösungen

$$y_1(t) = e^{-2t} \cdot \cos(t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = e^{-2t} \cdot \sin(t)$$

Die allg. Lösung ist dann

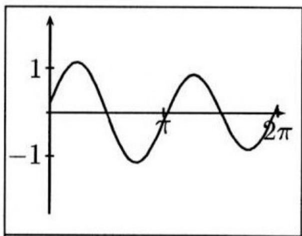
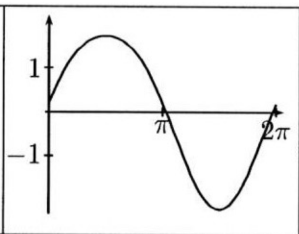
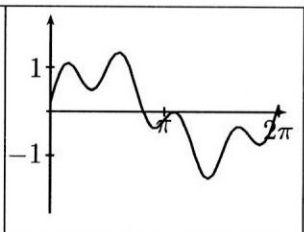
$$y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$$
$$= e^{-2t} \cdot (c_1 \cdot \cos(t) + c_2 \cdot \sin(t))$$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

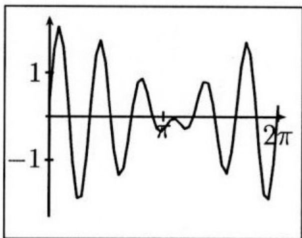
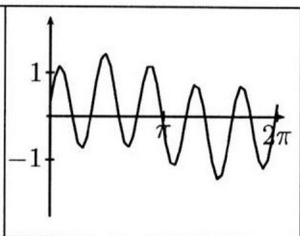
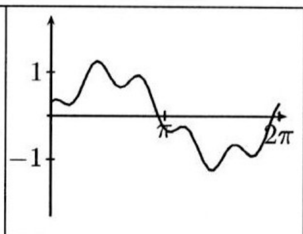
Welche der Bilder werden durch die übliche Fourierreihe mit den angegebenen Fourierkoeffizienten dargestellt? Alle nicht angegebenen Fourierkoeffizienten sind jeweils gleich Null.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung“ (1.5 Punkte) an.

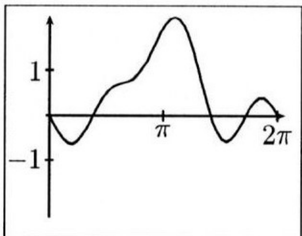
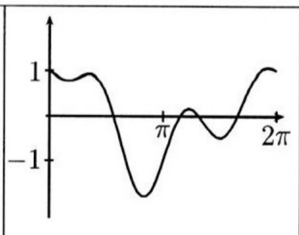
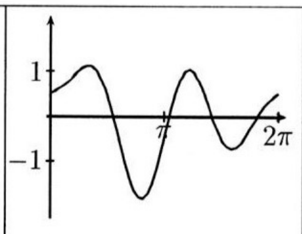
a) $a_1 = 0.2, \quad b_2 = 1$

			Enthal-tung
X			

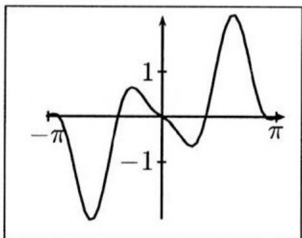
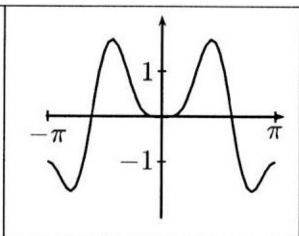
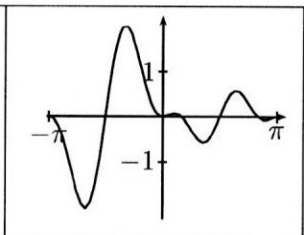
b) $a_5 = 0.3, \quad b_1 = 1$

			Enthal-tung
		X	

c) $a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 0.5, \quad b_3 = -0.5$

			Enthal-tung
X			

d) $a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -0.5, \quad a_4 = 0.5$ (Tipp: Symmetrie!)

			Enthal-tung
	X		

Aufgabe 8

a) $\cos(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+16}$

$\Rightarrow e^{3t} \cdot \cos(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s-3}{(s-3)^2+16}$

b) Es ist $s^2-4s+8 = (s-2)^2+4$

Wegen $\cos(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+4}$, $\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^2+4}$

sind dann

$$e^{2t}\cos(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s-2}{(s-2)^2+4}$$

und

$$e^{2t}\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{(s-2)^2+4}$$

Bestandteile der Rücktrafo.

Es ist $F(s) = \dfrac{2(s-2)+6}{s^2-4s+8}$

$$= 2\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + 3\cdot\frac{2}{(s-2)^2+4}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$= 2\cdot e^{2t}\cos(2t) + 3\cdot e^{2t}\sin(2t).$$

Aufgabe 9

a) $P(\text{Tor in } [0; 30\text{min}]) = \int_0^{30\text{min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt$

$= -e^{-\lambda t}\Big|_0^{30\text{min}} = -e^{-0{,}02\text{min}^{-1} \cdot 30\text{min}} - (-1)$

$= 1 - e^{-0{,}6} \approx 0{,}45$

b) $0{,}3 = P([0; 45\text{min}]) = \int_0^{45\text{min}} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt$

$= -e^{-\lambda t}\Big|_0^{45\text{min}} = -e^{-\lambda \cdot 45\text{min}} - (-1)$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda \cdot 45\text{min}} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$\Leftrightarrow -\lambda \cdot 45\text{min} = \ln 0{,}7$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}7}{45}\text{min}^{-1} \approx 0{,}008$

c) $40\text{ min} = \text{Erwartungswert } E(x) = \frac{1}{\lambda}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{40}\text{min}^{-1}$

d) $P = P($Mannschaft 1 mindestens 1 Tor in 90 Min
und Mann. 2 kein Tor in 90 Min$)$

$= P(\text{Tor für Mann 1 in } [0, 90\text{min}])$
$\cdot\, P(\text{kein Tor für Mann 2 in } [0, 90\text{min}])$

$= P_{\lambda_1}([0. 90\text{min}]) \cdot (1 - P_{\lambda_2}([0, 90\text{min}])$

$= \int_0^{90\text{min}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt \cdot \left(1 - \int_0^{90\text{min}} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt\right)$

$= -e^{-\lambda_1 t}\Big|_0^{90\text{min}} \cdot \left(1 - (-e^{-\lambda_2 t})\Big|_0^{90\text{min}}\right)$

$= (-e^{-0{,}9} + 1) \cdot (1 + e^{-1{,}35} - 1)$

$= (1 - e^{-0{,}9}) \cdot e^{-1{,}35} \approx 0{,}15$

e) „größeren Gewinnen" $\hat{=}$ im Durchschnitt schneller Tore

$\hat{=}$ kleinerer Erwartungswert $\hat{=}$ kleineres $\frac{1}{\lambda}$ $\Rightarrow$ größeres λ !