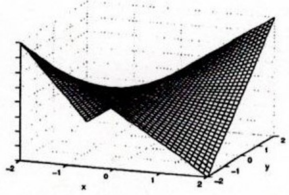
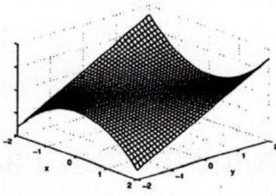
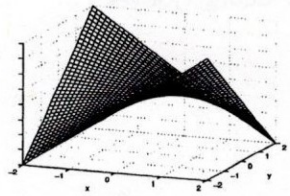
Aufgabe 1 (8 Punkte)

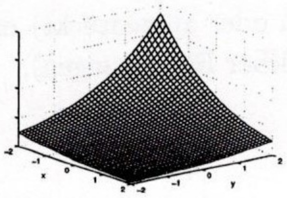
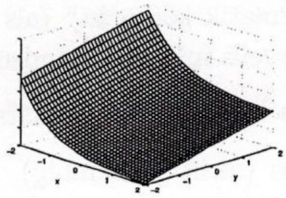
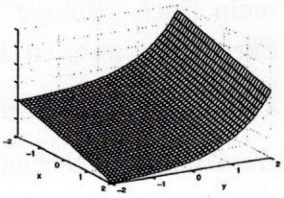
Kreuzen Sie jeweils an, welches Bild die angegebene Funktion darstellt.

Jedes richtige Kreuz zählt +2, jedes falsche −2 Punkte; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

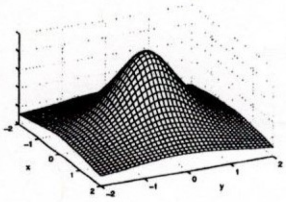
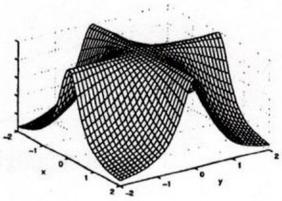
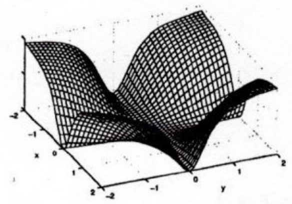
a) $f(x,y) = x \cdot y$

		
X		

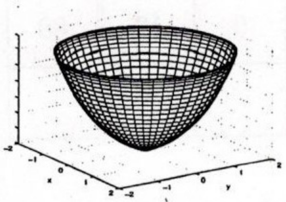
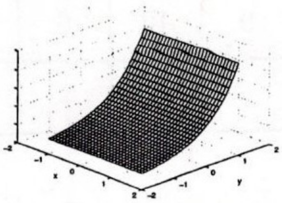
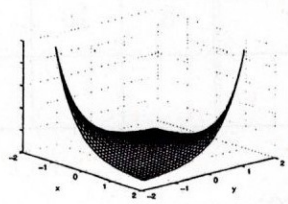
b) $f(x,y) = \mathrm{e}^y - x$

		
		X

c) $f(x,y) = \frac{1}{1+(x \cdot y)^2}$

		
	X	

d) $f(r,\varphi) = \mathrm{e}^r$ (in Polarkoordinaten gegeben)

		
X		

Aufgabe 2

Es ist $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} + xy e^{xy} & x^2 e^{xy} \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

1. Schritt:

$$J_f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = -f(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

$$J_f(x_1,y_1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = -f(x_1,y_1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/17 \\ 1/17 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/17 \\ 1/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30/17 \\ 1/17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) $r^2 \cdot \sin\varphi = \underset{\sqrt{x^2+y^2}}{\underset{\downarrow}{r}} \cdot \underbrace{r \cdot \sin\varphi}_{y}$

$\Rightarrow f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot y$

b) $\int_D f(x,y)\, d(x,y) = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} r^2 \cdot \sin\varphi \cdot r \, d\varphi \, dr$

$= \int_{r=0}^{2} r^3 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi$

$= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}$

$= 4 \cdot \left(-(-1) - (-1)\right)$

$= 8$

Aufgabe 4

a) $\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e_r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \vec{e_\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{e_\vartheta}$

$= 2r \sin\varphi \sin\vartheta \cdot \vec{e_r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \cdot r^2 \cos\varphi \sin\vartheta \cdot \vec{e_\varphi}$

$+ \frac{1}{r} r^2 \sin\varphi \cos\vartheta \cdot \vec{e_\vartheta}$

$= 2r \sin\varphi \sin\vartheta \cdot \vec{e_r} + r \cos\varphi \vec{e_\varphi} + r \sin\varphi \cos\vartheta \vec{e_\vartheta}$

b) $\int \vec{F} d\vec{s} = \phi(\text{Endpunkt}) - \phi(\text{Anfangspkt})$

In Kugel-KO entspricht

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: $r = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ \vartheta = \frac{\pi}{2}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $r = \sqrt{2},\ \varphi = 0,\ \vartheta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \int \vec{F} d\vec{s} = \phi(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \phi(\sqrt{2}, 0, \frac{\pi}{4})$

$= 4 \cdot 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 0 \cdot \sin\frac{\pi}{4}$

$= 4.$

Aufgabe 5

a) Damit y_1 und y_2 Lsgen sind müssen $\lambda = -2 \pm 3j$ Nullstellen des char. Polynoms sein, also

$$\begin{aligned} \lambda^2 + c\lambda + d &= (\lambda - (-2+3j)) \cdot (\lambda - (-2-3j)) \\ &= (\lambda + 2 - 3j) \cdot (\lambda + 2 + 3j) \\ &= (\lambda+2)^2 - (3j)^2 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 9 \cdot (-1) \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 13 \end{aligned}$$

$\Rightarrow c = 4,\ d = 13$

b) $y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 \overset{!}{=} y(0) &= c_1 \cdot y_1(0) + c_2 \cdot y_2(0) \\ &= c_1 \cdot 1 \quad + c_2 \cdot 0 \qquad \Rightarrow c_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= c_1 \cdot y_1' + c_2 \cdot y_2' \\ &= c_1 \cdot (-2e^{-2t}\cos(3t) - 3e^{-2t}\sin(2t)) \\ &\quad + c_2 \cdot (-2e^{-2t}\sin(3t) + 3e^{-2t}\cos(3t)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -1 \overset{!}{=} y'(0) = \underset{\substack{\| \\ 1}}{c_1} \cdot (-2) + c_2 \cdot 3 = -2 + c_2 \cdot 3$$

$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= 1 \cdot y_1(t) + \tfrac{1}{3} \cdot y_2(t) \\ &= e^{-2t}\left(\cos(3t) + \tfrac{1}{3}\sin(3t)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (maximal 6, minimal 0 Punkte)

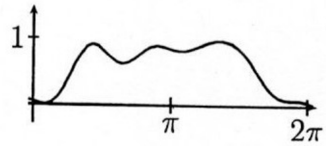
Kreuzen Sie an, ob die angegebenen Funktionen $u(x,t)$ Lösungen der entsprechenden partiellen Differenzialgleichung für $c = 1$ oder für $c = -1$ ist, oder ob sie weder für $c = 1$ noch für $c = -1$ eine Lösung ist.

Jedes richtige Kreuz zählt $+1$, jedes falsche -1 Punkte; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

	$u(x,t) = \sin(x-t)$			$u(x,t) = \mathrm{e}^x \cdot \sin(t)$		
	$c = 1$	$c = -1$	weder noch	$c = 1$	$c = -1$	weder noch
$\frac{\partial}{\partial x}u = c \cdot \frac{\partial}{\partial t}u$		X				X
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = c \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}u$	X				X	
$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}u = c \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}u$		X				X

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Betrachtet wird die Fourierreihe der rechts dargestellten Funktion f.



Nun werden einzelne Fourierkoeffizienten modifiziert.

Welches der Bilder unten entsteht durch die genannte Modifikation? Tragen Sie die entsprechende Nummer ein!

(Nicht alle Bilder kommen vor!)

	Bild-Nr.
a_0 wird um 2 erhöht	4
a_1 wird um 2 erhöht	5
b_1 wird um 2 erhöht	2
a_3 wird um 2 erhöht	6

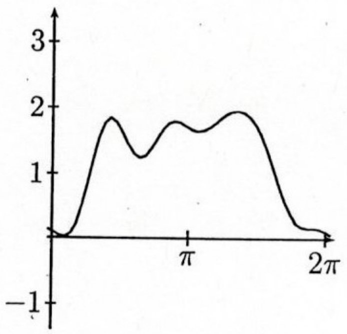


Bild 1

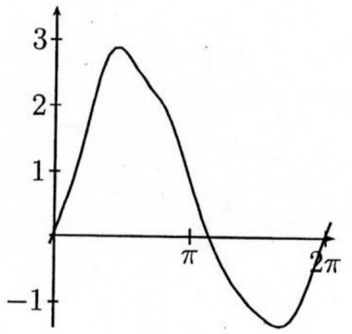


Bild 2

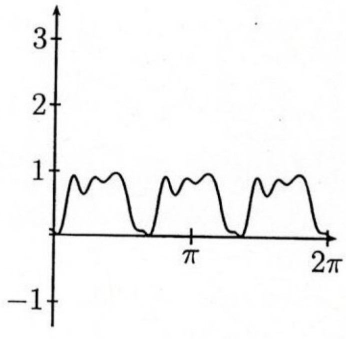


Bild 3

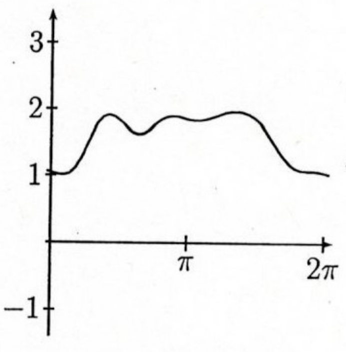


Bild 4

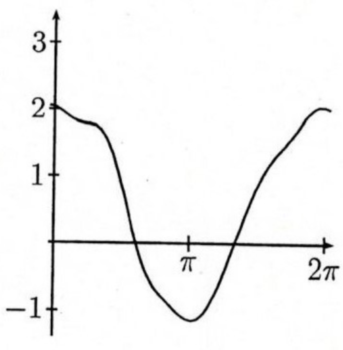


Bild 5

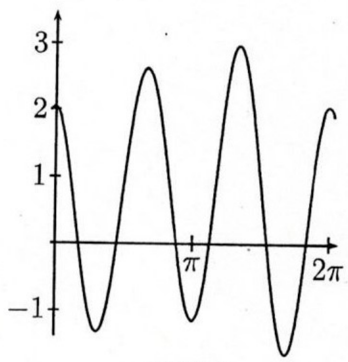


Bild 6

Aufgabe 8

a) $\frac{1}{(3s+6)^2} = \frac{1}{9(s+2)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{9} t e^{-2t}$

b) $\frac{s+3}{s^2+4s+8} = \frac{s+3}{(s+2)^2+4}$

$= \frac{s+2}{(s+2)^2+4} + \frac{1}{(s+2)^2+4}$

NR: $\cos(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+4}$

$\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^2+4}$

$\circ\; e^{-2t} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t)$

Aufgabe 9 (2 + 6 + 4 = 12 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $\mu = 4$ und $\sigma = 1.5$. Die entsprechende Dichtefunktion sei f.

Indem man Ziehungsergebnisse, die kleiner als 2 oder größer als 5 sind, verwirft und solange neu zieht, bis man in den Bereich von 2 bis 5 kommt, erhält man eine neue Zufallsvariable Y. Diese hat die Dichtefunktion

$$g(y) = \begin{cases} c \cdot f(y), & \text{falls } y \in [2,5], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit einer geeigneten Konstanten c.

a) Skizzieren Sie g.

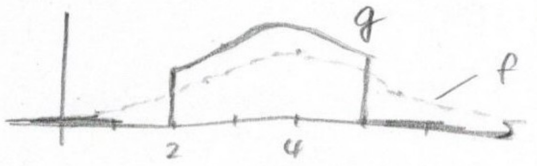
b) Welchen Wert hat c (ungefähr)?

c) Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat Y ungefähr. Kreuzen Sie den richtigen Wert an. (Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen)

Erwartungswert	
2	
2.8352	
3.5	
3.6447	X
4	
4.143	

Standardabweichung	
−1.236	
0.152	
0.802	X
1.5	
1.732	
3	

a)



b) Es muss $1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = c \cdot \int_2^5 f(y)\,dy = c \cdot P(X \in [2;5])$ sein

Dabei ist $P(X \in [2;5]) = \phi\left(\frac{5-4}{1{,}5}\right) - \phi\left(\frac{2-4}{1{,}5}\right) \approx \phi(0{,}67) - \phi(-1{,}33)$

$= \phi(0{,}67) - (1 - \phi(1{,}33)) \approx 0{,}75 - (1 - 0{,}91)$

$= 0{,}653$

$\Rightarrow c \approx \frac{1}{0{,}653} \approx 1{,}531$