Aufgabe 1 (maximal 9, minimal 0 Punkte)

Für welche in der Tabelle unten aufgeführten Paramterwerte ergibt die Menge der

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

(entspricht Kugelkoordinaten) eine Halbkugel?

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

Jeder richtige Eintrag zählt +1.5, jeder falsche −1.5 Punkte; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

	ist Halbkugel	ist keine Halbkugel
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \vartheta \in [0,\pi]$	X	
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}], \quad \vartheta \in [0,2\pi]$		X
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [-\pi,\pi], \quad \vartheta \in [0,\frac{\pi}{2}]$	X	
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad \vartheta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	X	
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [-\pi,\pi], \quad \vartheta \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$		X
$r \in [-1,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \vartheta \in [0,\frac{\pi}{2}]$		X

Aufgabe 2

a) $\operatorname{grad}(f(x,y)\cdot g(x,y)) = \operatorname{grad}(xy^2 \cdot \sin(x^2+y))$

$= (y^2 \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot \cos(x^2+y)\cdot 2x,$

$x \cdot 2y \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot \cos(x^2+y))$

$= (y^2, x\cdot 2y) \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot (\cos(x^2+y)\cdot 2x,$
$\cos(x^2+y))$

$= \operatorname{grad}(xy^2) \cdot \sin(x^2+y) + xy^2 \cdot \operatorname{grad}(\cos(x^2+y))$

$= \operatorname{grad}(f(x,y)) \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot \operatorname{grad}(g(x,y))$

b) $\operatorname{grad}(f(\vec{x})\cdot g(\vec{x}))$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f(\vec{x})\cdot g(\vec{x})), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f(\vec{x})\cdot g(\vec{x}))\right)$

$\overset{\text{Produkt}}{\underset{\text{regel}}{=}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x})\right)\cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x})\cdot \frac{\partial}{\partial x_1} g(\vec{x}), \dots,\right.$

$\left.\left(\frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x})\right)\cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x})\cdot \frac{\partial}{\partial x_n} g(\vec{x})\right)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x})\right) \cdot g(\vec{x})$

$+ f(\vec{x}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g(\vec{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} g(\vec{x})\right)$

$= \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} g(\vec{x})$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im folgenden sind drei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ angegeben bestehend aus der Kombination einer schnellen und einer langsamen Kreis- bzw. Cosinusbewegung.

Welches der Bilder unten gehört zu welcher Funktion? Tragen Sie die entsprechende Nummer ein!

(Nicht alle Bilder kommen vor!)

	Bild-Nr.
$f(t) = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(8t) \\ \sin(8t) \end{pmatrix}$	4
$f(t) = (2 + \cos(8t)) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	5
$f(t) = 3\cos(8t) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	2

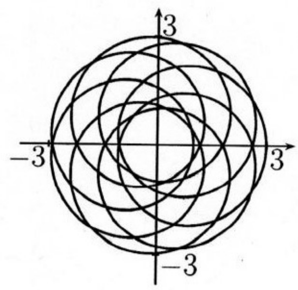


Bild 1

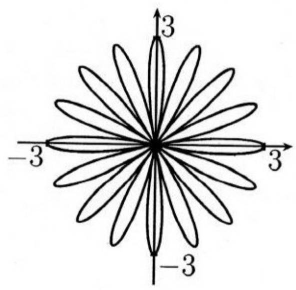


Bild 2

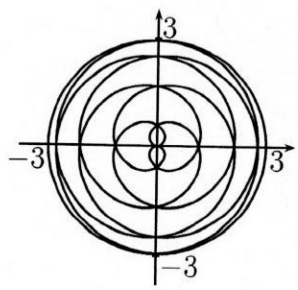


Bild 3

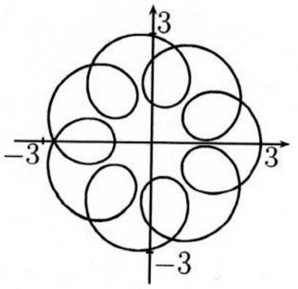


Bild 4

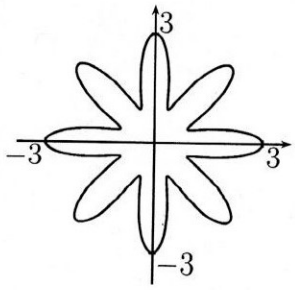


Bild 5

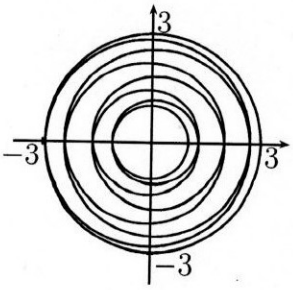


Bild 6

Aufgabe 4

$$\int_D (x+y)\cdot\cos(x\cdot y)\, d(x,y)$$

$$= \int_D x\cdot\cos(xy)\, d(x,y) + \int_D y\cdot\cos(xy)\, d(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^{1/2}\int_{y=0}^{\pi} x\cdot\cos(xy)\, dy\, dx + \int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{1/2} y\cdot\cos(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(xy)\Big|_{y=0}^{\pi} dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(xy)\Big|_{x=0}^{1/2} dy$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \sin(\pi x)\, dx + \int_{y=0}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}y)\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x)\Big|_{x=0}^{1/2} + (-2)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}y)\Big|_{y=0}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi} + (-2)\cdot(0-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 5

a) $\int \vec{F}\, d\vec{r}_a = \int_0^1 \vec{F}(t, t^2, t) \cdot \vec{r}_a{}'(t)\, dt$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 - 3(t^2)^2 \\ -6t \cdot t^2 \\ 4 \cdot t \cdot t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \left(-2t^4 - 12t^4 + 4t^4\right) dt$$

$$= \int_0^1 -10t^4\, dt = -2t^5 \Big|_0^1 = -2$$

Alternativ: Durch Probieren findet man, dass

$$\phi(x,y,z) = x \cdot (z^4 - 3y^2) = -3xy^2 + xz^4$$

ein Potenzial zu $\vec{F}$ ist, also grad $\phi = \vec{F}$.

Daher ist $\int \vec{F}\, d\vec{r}_a = \phi(\text{Endpunkt}) - \phi(\text{Anfangspunkt})$

$$= \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = -2 - 0 = -2.$$

b) Es ist $\vec{r}_b(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}_a(0)$ und $\vec{r}_b(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{r}_a(1)$.

Wegen rot $\vec{F} = \vec{0}$ ist das Wegintegral unabh. vom konkreten Weg, also $\int \vec{F}\, d\vec{r}_b = \int \vec{F}\, d\vec{r}_a \overset{a)}{=} -2$

c) Es ist $\vec{r}_c(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}_c(1)$, d.h. $\vec{r}_c$ ist ein geschlossener Weg. Wegen rot $\vec{F} = \vec{0}$ ist daher

$$\int \vec{F}\, d\vec{r}_c = 0$$

Aufgabe 6

a) Ansatz: $y(x) = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow y'(x) = 2ax + b$

in die DGL eingesetzt:

$2ax + b = ax^2 + bx + c - 2x^2$

$\Leftrightarrow \quad 0 = (a-2)x^2 + (b-2a)x + c - b$.

Dies ist erfüllt für $a = 2$, $b = 4$ und $c = 4$

$\Rightarrow y(x) = 2x^2 + 4x + 4$

b) $y(1{,}5) \approx y(1) + 0{,}5 \cdot y'(1)$

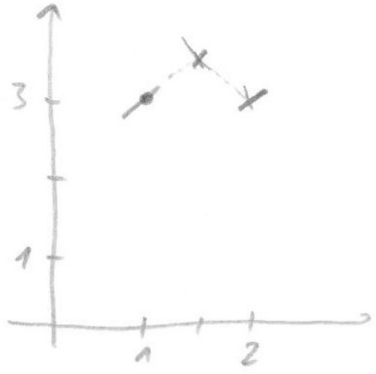
$= 3 + 0{,}5 \cdot (y(1) - 2 \cdot 1^2)$

$= 3 + 0{,}5 \cdot (3 - 2) = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$

$y(2) \approx y(1{,}5) + 0{,}5 \cdot y'(1{,}5)$

$\approx 3{,}5 + 0{,}5 \cdot (y(1{,}5) - 2 \cdot 1{,}5^2)$

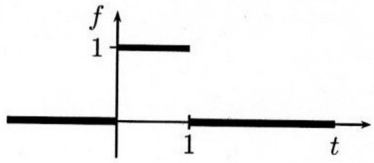
$\approx 3{,}5 + 0{,}5 (3{,}5 - 4{,}5) = 3{,}5 - 0{,}5 = 3$



Aufgabe 7 (3 + 6 = 9 Punkte)

a) Begründen Sie, dass die Laplace-Transformation zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in]0,1[, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



(s. Skizze) gleich

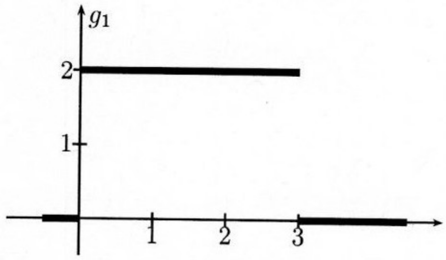
$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

ist.

b) Geben Sie die Laplace-Transformationen zu den wie folgt dargestellten Funktionen g_i an.

Tipp: Sie können die Angaben aus a) nutzen; Sie brauchen die entstehenden Ausdrücke nicht zu vereinfachen.

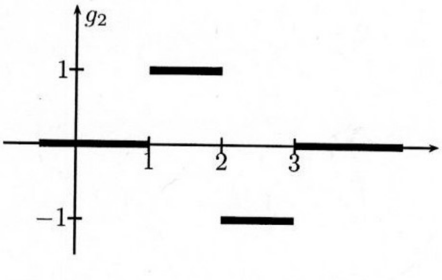
b1)



$\left(g_1(t) = 2 \cdot f\left(\frac{1}{3}t\right) \right)$

$$G_1(s) = 2 \cdot 3 \cdot F(3 \cdot s) = 2 \cdot \cancel{3} \cdot \frac{1 - e^{-3s}}{\cancel{3}s} = 2 \cdot \frac{1 - e^{-3s}}{s}$$

b2)



$\left(g_2(t) = f(t-1) - f(t-2) \right)$

$$G_2(s) = e^{-s} F(s) - e^{-2s} F(s) = (e^{-s} - e^{-2s}) \cdot \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

a) $$F(s) = \int_0^\infty f(s) \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^1 1 \cdot e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_{t=0}^{1} = -\frac{1}{s} e^{-s} - \left(-\frac{1}{s} \cdot 1\right) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Alternativ: f entsteht aus

$\frac{1}{s}$ $e^{-s} \cdot \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Aufgabe 8

a) a1) $1mm = 2\sigma$

$\Rightarrow P(Abw. > 1mm) = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$

a2) $P(Abw. > 0{,}8mm) = 1 - P(Abw. \leq 0{,}8mm)$

$= 1 - P([19{,}2mm ; 20{,}8mm])$

$= 1 - \left(\phi\left(\frac{20.8mm - 20mm}{0{,}5mm}\right) - \phi\left(\frac{19{,}2mm - 20mm}{0{,}5mm}\right)\right)$

$= 1 - (\phi(1{,}6) - \underbrace{\phi(-1{,}6)}_{=1-\phi(1{,}6)})$

$= 1 - (2 \cdot \phi(1{,}6) - 1)$

$= 2 - 2 \cdot \phi(1{,}6) \approx 2 - 2 \cdot 0{,}9452 = 0{,}1096$

b) 5% Ausschuss $\Rightarrow$ 95% innerhalb $\pm 0{,}5mm$

$\Rightarrow 1.96\,\sigma = 0{,}5mm$

$\Rightarrow \sigma = \frac{0.5mm}{1.96} \approx 0{,}255\,mm$

c) $\bar{x} = \frac{1}{5}(19.8 + 20.8 + 20.1 + 19.4 + 20.4)\,mm = 20.1\,mm$

$s^2 = \frac{1}{4}\left((19{,}8 - 20{,}1)^2 + \ldots + (20{,}4 - 20{,}1)^2\right)mm^2$

$= \frac{1}{4}\left(0{,}3^2 + 0.7^2 + 0^2 + 0{,}7^2 + 0{,}3^2\right)mm^2$

$= 0{,}29\,mm^2$

$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}29mm^2} \approx 0{,}54\,mm$

Der Median ist $x_m = 20.1mm$