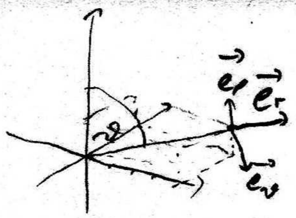
Aufgabe 1

a)



$$r = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$

$$\varphi = \arctan \frac{2}{4} \approx 0{,}46$$

$$\vartheta = \arccos \frac{1}{r} = \arccos \frac{1}{\sqrt{21}} \approx 1{,}35$$

b) $\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-2xy\,e^{-x^2+4y},\ e^{-x^2+4y} + 4y\cdot e^{-x^2+4y}\right)$$

a) $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$

$\Leftrightarrow\ -2xy = 0$ und $1+4y=0$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{4}$ und $x=0$

$\Rightarrow\ \vec{x}_0 = (0, -\frac{1}{4})$

b) $f(1{,}95;\ 1{,}1) \approx f(2,1) + \operatorname{grad} f(2,1)\cdot\begin{pmatrix}-0{,}05\\0{,}1\end{pmatrix}$

$= 1\cdot 1 + (-2\cdot 2\cdot 1\cdot 1,\ 1+4\cdot 1\cdot 1)\begin{pmatrix}-0{,}05\\0{,}1\end{pmatrix}$

$= 1 + (-4, 5)\cdot\begin{pmatrix}-0{,}05\\0{,}1\end{pmatrix}$

$= 1 + 0{,}2 + 0{,}5$

$= 1{,}7$

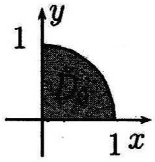
c) Die part. Fkt. in x- und y-Richtung haben in $\vec{x}_0$ die Abl. 0 (wegen $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = (0,0)$) und nach Angabe $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\vec{x}_0) > 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\vec{x}_0) > 0$.
Damit ~~ist~~ $\vec{x}_0$ Minimalstelle der x- und y-Schnitte.
$\vec{x}_0$ kann also kein Maximalstelle von f sein sondern Minimal- oder Sattelstelle.

Aufgabe 3 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Betrachtet wird das Integral $\int_D x^2 y \, \mathrm{d}(x,y)$ zu verschiedenen Integrationsgebieten D.

Sei I_0 der Wert des Integrals zu dem nebenstehend dargestellten Viertelkreis:

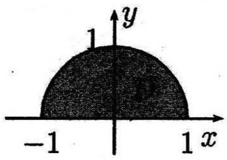
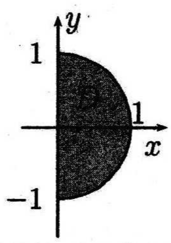
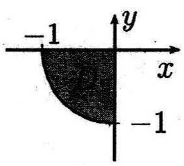
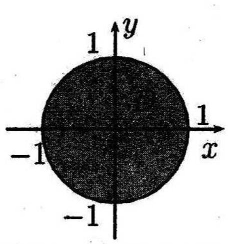
$$I_0 = \int\limits_{D_0} x^2 y \, \mathrm{d}(x,y).$$



Kreuzen Sie zu den in der folgenden Tabelle dargestellten Integrationsgebieten an, welchen Wert jeweils das entsprechende Integral hat.

Jeder richtige Eintrag zählt +2 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte. Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

Tipp: Sie brauchen die Integrale nicht zu berechnen. Beachten Sie den Integranden!

	$-I_0$	0	I_0	$2I_0$	$4I_0$
				X	
		X			
	X				
		X			

Aufgabe 4

a) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \cos(yz)) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 \cdot z^2)$

$= yz + \cos(yz) - yz\sin(yz) + 2x^2 z$

b) $\int \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{\pi} \vec{F}(\sin t, t^2, 0) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$

$= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin t \cdot t^2 \cdot 0 \\ t^2 \cos(t^2 \cdot 0) \\ \sin^2 t \cdot 0^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$= \int_0^{\pi} 2t^3\, dt = \frac{1}{2} t^4 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{2}$

Aufgabe 5

a) $y_0 = y$, $y_1 = y'$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_0 - x \cdot y_1 + x^2 \end{aligned}$$

AB: $y_0(2) = 3$, $y_1(2) = 1$

b) $y_0'(2) = y_1(2) = 1$

$$y_1'(2) = y_0(2) - 2 \cdot y_1(2) + 2^2$$
$$= 3 - 2 \cdot 1 + 4 = 5$$

$$\Rightarrow y_0(2.1) \approx y_0(2) + 0{,}1 \cdot y_0'(2) = 3 + 0{,}1 \cdot 1 = 3{,}1$$
$$y_1(2.1) \approx y_1(2) + 0{,}1 \cdot y_1'(2) = 1 + 0{,}1 \cdot 5 = 1{,}5$$

Aufgabe 6

Ansatz: $y = c \cdot e^{j \cdot 2t}$ (nachher Re-Teil)

$\Rightarrow y' = 2jc\, e^{j2t}$

$y'' = -4c\, e^{j2t}$

Einsetzen in die komplexifizierte Gleichung

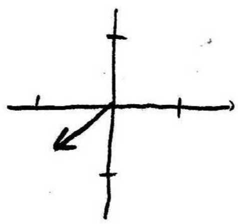
$$-4c\, e^{j2t} + 2jc\, e^{j2t} + 2 \cdot c \cdot e^{j2t} = 3 \cdot e^{j2t}$$

$$\Rightarrow (-4c + 2jc + 2c) \cdot \cancel{e^{j \cdot 2t}} = 3 \cdot \cancel{e^{j2t}}$$

$$\Rightarrow \quad c \cdot (2j - 2) = 3$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{3}{2j-2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{j-1} = \frac{3}{2} \, \frac{-j-1}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} j$$

In Polardarstellung ist



$$c = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot e^{j \cdot \frac{5}{4}\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{8}} \cdot e^{j \cdot -\frac{5}{4}\pi}$$

$\Rightarrow$ Eine Lsg ist

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{\frac{9}{8}} \cdot e^{j \cdot \frac{5}{4}\pi} \cdot e^{j \cdot 2t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sqrt{\frac{9}{8}}\, e^{j(2t + \frac{5}{4}\pi)}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sqrt{\frac{9}{8}} \left(\cos(2t + \tfrac{5}{4}\pi) + j \cdot \sin(2t + \tfrac{5}{4}\pi)\right)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{9}{8}} \cdot \cos(2t + \tfrac{5}{4}\pi).$$

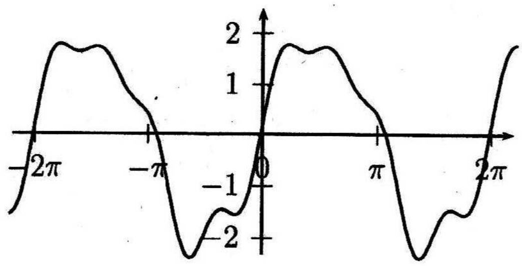
Aufgabe 7 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Welche Spalte zeigt die richtigen ersten Fourierkoeffizienten zu der links dargestellten 2π-periodischen Funktion?

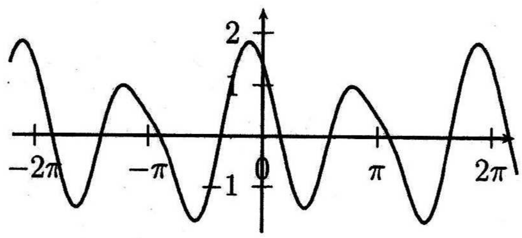
(Die weiteren Fourierkoeffizienten sind irgendwelche reellen Zahlen.)

Kreuzen Sie die richtige Spalte an!

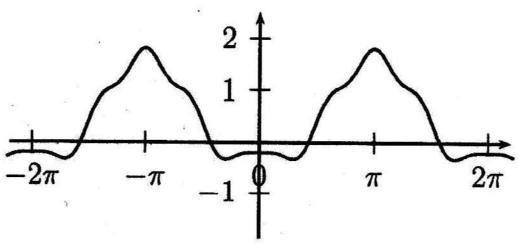
Jeder richtige Eintrag zählt +2 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte. Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.



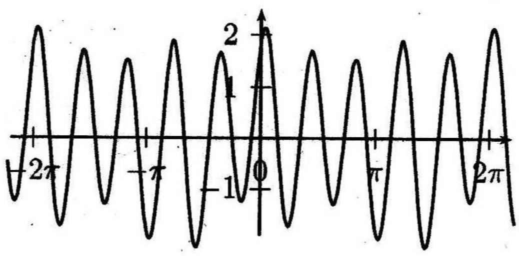
$a_0 = 0$	$a_0 = 0$	$a_0 = 0$	$a_0 = 0$
$a_1 = 2$	$a_1 = 0.1$	$a_1 = 0.1$	$a_1 = 0.1$
$a_2 = 0.2$	$a_2 = 2$	$a_2 = 0.2$	$a_2 = 0.2$
$b_1 = 0.1$	$b_1 = 0.2$	$b_1 = 2$	$b_1 = 0.1$
$b_2 = 0.1$	$b_2 = 0.1$	$b_2 = 0.1$	$b_2 = 2$
		X	



$a_0 = 0$	$a_0 = 1.2$	$a_0 = 0$	$a_0 = 1.2$
$a_1 = 1$	$a_1 = 1$	$a_1 = 0.3$	$a_1 = 0.3$
$a_2 = 0.3$	$a_2 = 0.3$	$a_2 = 1$	$a_2 = 1$
$b_1 = -1$	$b_1 = -1$	$b_1 = 0.1$	$b_1 = 0.1$
$b_2 = 0.1$	$b_2 = 0.1$	$b_2 = -1$	$b_2 = -1$
		X	



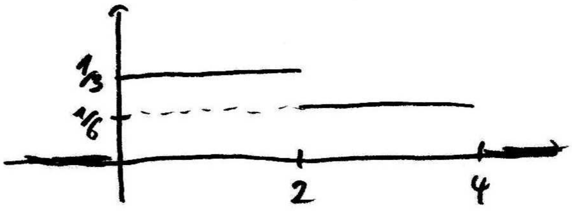
$a_0 = -1$	$a_0 = 1$	$a_0 = -1$	$a_0 = 1$
$a_1 = -1$	$a_1 = -1$	$a_1 = 0$	$a_1 = 0$
$a_2 = 0.2$	$a_2 = 0.2$	$a_2 = 0$	$a_2 = 0$
$b_1 = 0$	$b_1 = 0$	$b_1 = -1$	$b_1 = -1$
$b_2 = 0$	$b_2 = 0$	$b_2 = 0.2$	$b_2 = 0.2$
	X		



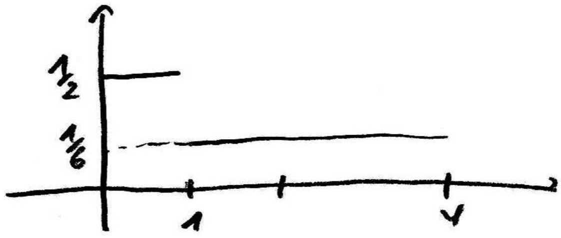
$a_0 = 5$	$a_0 = 0.1$	$a_0 = -0.2$	$a_0 = 0.1$
$a_1 = 0.1$	$a_1 = 5$	$a_1 = 0.2$	$a_1 = 0.2$
$a_2 = 0.2$	$a_2 = 0.1$	$a_2 = 5$	$a_2 = 0.1$
$b_1 = -0.1$	$b_1 = -0.1$	$b_1 = 0.1$	$b_1 = 0.1$
$b_2 = 0.1$	$b_2 = 0.1$	$b_2 = -0.1$	$b_2 = -0.1$
			X

Aufgabe 8

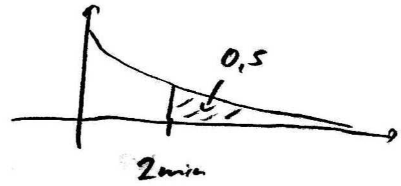
a)



b)



Aufgabe 9



a) $0{,}5 = \int_{2min}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$

$= -e^{-\lambda x} \Big|_{2min}^{\infty}$

$= 0 + e^{-\lambda \cdot 2min}$

$\Leftrightarrow \ln 0{,}5 = -\lambda \cdot 2min$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}5}{2min} \approx 0{,}347\ min^{-1}$

b) $E(x) = \frac{1}{\lambda} \approx 2{,}89\ min$

c) $P(X \leq 30\,sec) = P(X \leq \frac{1}{2}\,min)$

$= \int_{0}^{\frac{1}{2}min} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$

$= -e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\frac{1}{2}min}$

$\approx -e^{-0{,}347 min^{-1} \cdot \frac{1}{2} min} + 1$

$= 0{,}159.$