
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

26.03.2024

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 08.04. statt.
Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 12.04. oder 15.04. statt.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 8 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ_0	Bon.	Σ
Max	10	8	13	20	12	13	8	6	90	4	94

Note:

Aufgabe 1 (10 Punkte)

An verschiedenen Stellen (x_k, y_k) wurden Beobachtungen f_k gemacht:

- Bei $(x_1, y_1) = (1, 0)$ ist $f_1 = 2$,
- bei $(x_2, y_2) = (0, 3)$ ist $f_2 = 1$,
- bei $(x_3, y_3) = (1, 2)$ ist $f_3 = 0$.

Gesucht sind die Parameter a und b zu einer Ausgleichsebene

$$f(x, y) \;=\; ax + by,$$

so dass die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen $f(x_k, y_k)$ und f_k, also

$$d \;=\; \sum_{k=1}^{3} \big(f(x_k, y_k) - f_k\big)^2,$$

minimal wird.

Aufgabe 2 $(2 + 6 = 8$ Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} x \cdot \cos(xy) \\ xy^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

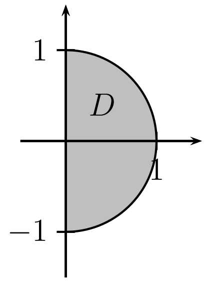
a) Geben Sie die Jacobimatrix zu f an.

b) Sei $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Geben Sie mit Hilfe von $f(x_0, y_0)$ und der Jacobimatrix an der Stelle (x_0, y_0) eine (lineare) Näherung an für $f(1.9, 0.05)$.

Aufgabe 3 ($7 + 6 = 13$ Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten gegeben durch

$$f(r, \varphi) \;=\; (1 - r) \cdot \cos \varphi.$$



a) Bestimmen Sie

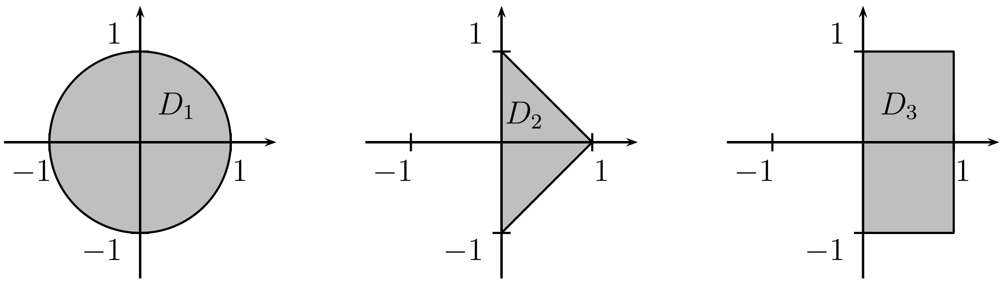
$$I \;:=\; \int_D f \, \mathrm{d}(x, y),$$

wobei D der in der nebenstehenden Skizze markierte Halbkreis ist.

b) Zu den unten skizzierten Bereichen D_1, D_2 und D_3 wird jeweils $I_k \;:= \int_{D_k} f \, \mathrm{d}(x, y)$ betrachtet.

Sind I_1, I_2 bzw. I_3 jeweils größer, gleich oder kleiner als I?

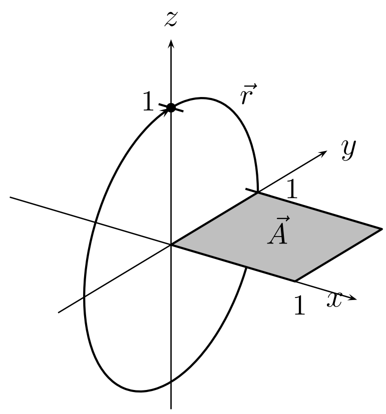
Begründen Sie Ihre Aussage! (Tipp: Beachten Sie auch den Integranden!)



Aufgabe 4 (20 Punkte, davon bis zu 10 Enthaltungspunkte)

Entsprechend der Skizze sei

> $\vec{A}$ das Einheitsquadrat in der (x, y)-Ebene und
>
> $\vec{r}$ ein Weg, der ausgehend von $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ den Einheitskreis in der (y, z)-Ebene umrandet.



Gelten die folgenden Aussagen für alle „braven“ Vektorfelder

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}?$$

Kreuzen Sie die richtige Angabe (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

		gilt	gilt nicht	Enth.
$\iint \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{A}$	hängt nicht von F_1 ab.			
	hängt nicht von F_2 ab.			
	hängt nicht von F_3 ab.			
$\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r}$	hängt nicht von F_1 ab.			
	hängt nicht von F_2 ab.			
	hängt nicht von F_3 ab.			
Ist überall $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, so ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$.				
Ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$, so ist überall $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.				
Ist überall $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, so ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$.				
Ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld, so ist $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$.				

Aufgabe 5 ($5 + 7 = 12$ Punkte)

Die homogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = 0$$

hat als Lösungen

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \sin(5t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \cos(5t).$$

a) Welchen Wert haben die Konstanten a und b?

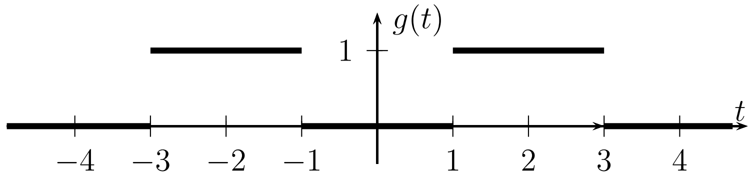
b) Wie lautet eine Lösung y mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$?

(Hinweis: Die beiden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.)

Aufgabe 6 ($8 + 5 = 13$ Punkte)

Sei

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } -3 < t < -1, \text{ oder } 1 < t < 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Berechnen Sie die Fourier-Transformierte G zu g auf die folgenden zwei verschiedenen Weisen und bringen Sie die entstehenden Ausdrücke jeweils in eine reelle Form:

a) direkt mittels der Integral-Definition der Fourier-Transformierten.

b) indem Sie g mit Hilfe von

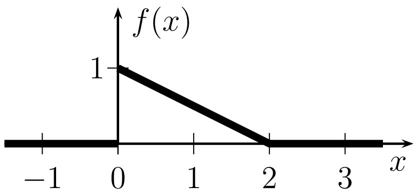
$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen und die Fourier-Transformierte $F(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$ zu f verwenden.

(Hinweis: Sie brauchen nicht beunruhigt zu sein, wenn sich Ihre Resultate bei a) und b) „optisch“ unterscheiden; bei richtiger Rechnung könnte man sie mittels der Additionstheoreme ineinander überführen.)

Aufgabe 7 $(2 + 3 + 3 = 8$ Punkte$)$

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit einer entsprechend der Skizze zwischen 0 und 2 linear fallenden Wahrscheinlichkeitsdichte f.



a) Wie groß ist $p_0 = P(X > 1)$?

b) Es wird zweimal hintereinander unabhängig eine Zufallszahl entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wert davon größer als 1 ist?

c) Aus X kann man eine neue Zufallsvariable $Y = 2X$ konstruieren, indem man die Ziehungsergebnisse jeweils verdoppelt. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte g zu Y.

Aufgabe 8 ($4 + 2 = 6$ Punkte)

In einem Geschäft wurde der zeitliche Abstand des Eintreffens von Kunden gemessen mit den Ergebnissen

23s, 42s, 15s, 7s, 18s.

a) Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{x}$ und die Standardabweichung s der Stichprobe.

b) Die Zeiten sollen als exponential-verteilt modelliert werden. Schlagen Sie dazu einen sinnvollen Parameter λ vor (mit Begründung)!