
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

21.09.2023

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 09.10. statt.
Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 13.10. statt.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 8 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

____

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Hier die per Mail angekündigte rein statistische Frage. Die Beantwortung ist völlig freiwillig und hat keinerlei Auswirkungen auf die Notengebung zur Klausur:

> Hintergrund: In der Corona-Zeit gab es zur Mathematik nur digitale Angebote; die Ergebnisse waren vergleichbar, vielleicht sogar ein bisschen besser, als in den Vorjahren. Im aktuellen Durchlauf gab es im Prinzip weiterhin sämtliche digitale Angebote und zusätzlich Präsenzangebote. Mich interessiert, wie viele von Ihnen weiterhin erfolgreich allein mit den digitalen Angeboten gelernt haben.

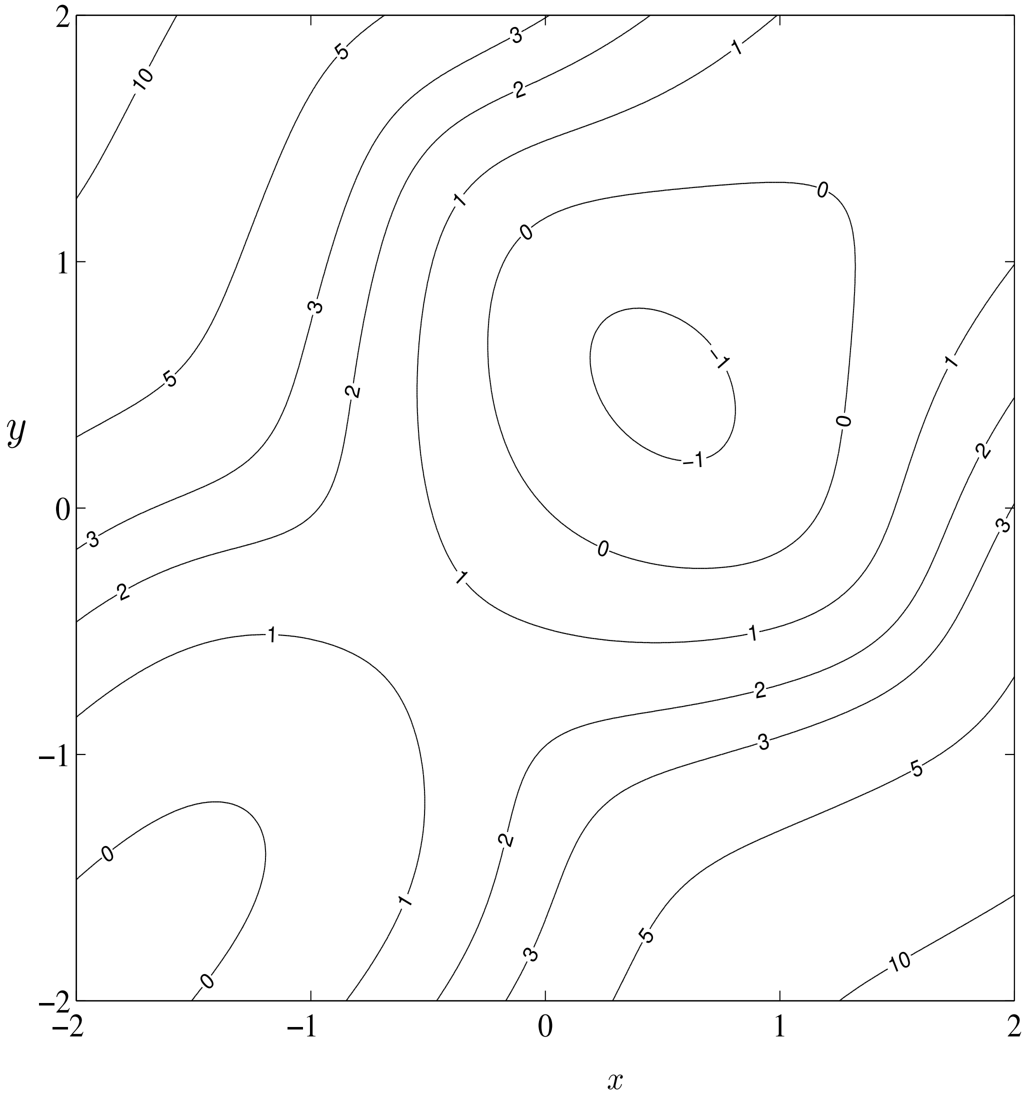
Frage: An wieviel Prozent der Präsenz-Plenumsveranstaltungen
haben Sie teilgenommen (Prozentangabe zwischen 0 und 100%)? ____________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ_0	Bon.	Σ
Max	16	8	10	16	10	6	12	14	92	4	96

Note:

Aufgabe 1 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Das folgende Bild zeigt die Höhenlinien zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Kreuzen Sie in der Tabelle auf der folgenden Seite jeweils die richtige Aussage (2 Punkte) oder die Enthaltungsspalte („E.“) (1 Punkt) an.

Hinweis: Es gibt jeweils genau eine richtige Aussage.

Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

			E.
Die Stelle $(x, y) = (-0.5, -0.5)$ ist	Minimalstelle		
	Maximalstelle		
	Sattelstelle		
Die Stelle $(x, y) = (0.5, 0.5)$ ist	Minimalstelle		
	Maximalstelle		
	Sattelstelle		
Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt	$f(x, y) = f(y, x)$		
	$f(x, y) = f(x, -y)$		
	$f(x, y) = f(-x, -y)$		
$\operatorname{grad} f(1, -1) \approx$	$(-1.64, 5.08)$		
	$(1.64, -5.08)$		
	$(5.08, -1.64)$		
$\operatorname{grad} f(1.5, 0.5) \approx$	$(2.55, -0.81)$		
	$(-0.81, 2.55)$		
	$(0.13, 0.13)$		
$\frac{\partial}{\partial x} f(-1, 1) \approx$	-5.0		
	0.0		
	5.0		
$\frac{\partial}{\partial y} f(1, -0.5) \approx$	-3.9		
	1.5		
	2.8		
$\int_{[-2,2]\times[-2,2]} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$	< 0		
	$= 0$		
	> 0		

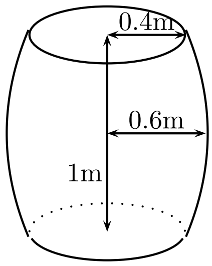
Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) \;=\; 2x^2 - 4x + xy + yz.$$

Führen Sie ausgehend von $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 1)$ zwei Schritte des Gradientenverfahrens mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ zur *Minimierung* von f durch.

Aufgabe 3 (10 Punkte)



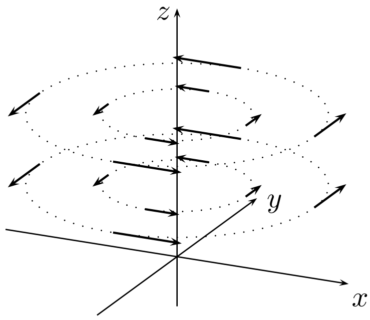
Bestimmen Sie das Volumen eines 1m hohen Fasses, das an der dicksten Stelle einen Radius von 0.6m und am Boden und Deckel einen Radius von 0.4m hat, wobei das Fass parabelförmig gewölbt ist.

Aufgabe 4 ($4+4+8=16$ Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Hinweis: Durch die folgenden Angaben sind die Vektorfelder $\vec{F}$ nicht eindeutig bestimmt. Bei a1) und a2) reichen jeweils *eine* richtige Angabe.

a1) Geben Sie mit Hilfe lokaler Zylinderkoordinaten eine Funktionsvorschrift an für ein Vektorfeld $\vec{F}$, das das folgende Verhalten zeigt:

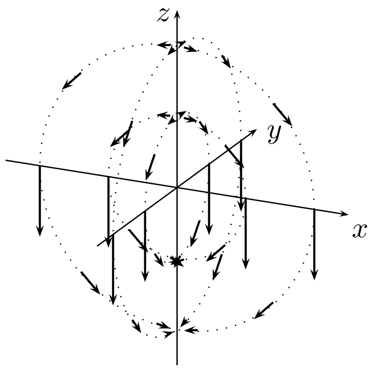
Die Richtung von $\vec{F}$ ist jeweils tangential zu Kreisen um die z-Achse; nach außen hin wird $\vec{F}$ länger.



$\vec{F} \;=$

a2) Geben Sie mit Hilfe lokaler Kugelkoordinaten eine Funktionsvorschrift an für ein Vektorfeld $\vec{F}$, das das folgende Verhalten zeigt:

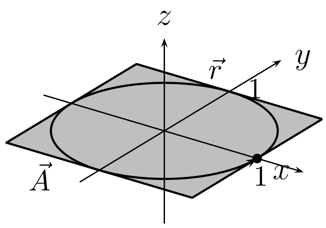
Die Richtung von $\vec{F}$ ist jeweils tangential zu einer Kugel um den Ursprung abwärts gerichtet; die größte Länge wird beim Durchstoßen der (x,y)-Ebene erreicht; bei Annäherung an die z-Achse geht die Länge gegen 0.



$\vec{F} \;=$

b) Entsprechend der Skizze sei

- $\vec{r}$ der Weg, der ausgehend von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ den Einheitskreis in der (x,y)-Ebene umrandet,
- $\vec{A}$ das Quadrat in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(-1,-1,0)$ und $(-1,1,0)$.



Sind die in der Tabelle angegebenen Weg- bzw. Flächenintegrale für jedes Vektorfeld entsprechend a1) bzw. a2) gleich Null?

Kreuzen Sie den richtigen Eintrag (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

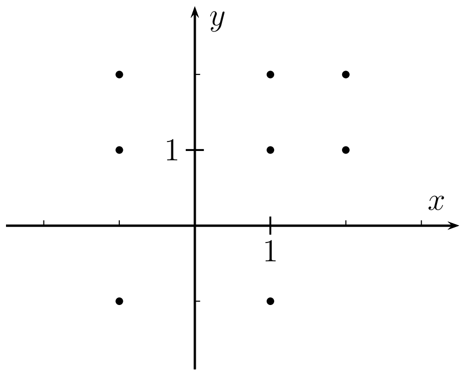
		gilt	gilt nicht	Enth.
Für Vektorfelder $\vec{F}$ entspr. a1)	$\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$			
	$\iint \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$			
Für Vektorfelder $\vec{F}$ entspr. a2)	$\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$			
	$\iint \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{A} = 0$			

Aufgabe 5 ($4 + 6 = 10$ Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' \;=\; x \cdot (1 - y).$$

a) Zeichnen Sie in das Diagramm an den markierten acht Punkten die Richtungselemente für das Richtungsfeld der Differenzialgleichung.



b) Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems mit $y(1) = 0$ zu der Differenzialgleichung, Schrittweite 0.5, aus.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Geben Sie Parameter $c, \lambda > 0$ an, so dass die Funktion

$$f(t,x) \;=\; \sin(ct + 2x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Lösung der partiellen Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) \;=\; \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$$

ist.

Aufgabe 7 $(6+6=12$ Punkte$)$

a) Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$y'' + 3y' - 4y \;=\; 2\sin(3t), \qquad y(0) \;=\; 2, \quad y'(0) \;=\; -1.$$

Transformieren Sie das Anfangswertproblem in den Laplace-Bereich und bestimmen Sie dort die entsprechende Lösung $Y(s)$.

Sie brauchen $Y(s)$ nicht zu vereinfachen und nicht wieder zurück zu transformieren!

b) Wie lautet die Laplace-Rücktransformationen $f(t)$ zu

$$F(s) \;=\; \frac{2s-2}{s^2-5s+6}?$$

Aufgabe 8 ($2 + 4 + 6 + 2 = 14$ Punkte)

Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Die entsprechende Dichtefunktion sei f.

Indem man Ziehungsergebnisse, die größer als 3 sind, verwirft und solange neu zieht, bis man einen Wert kleiner oder gleich 3 hat, erhält man eine neue Zufallsvariable Y. Diese hat die Dichtefunktion

$$g(y) = \begin{cases} c \cdot f(y), & \text{falls } y \leq 3, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit einer geeigneten Konstanten c.

a) Skizzieren Sie für $\lambda = \frac{1}{3}$ die Funktionen f (durchgezogen) und g (gestrichelt) in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

b) Sei λ beliebig. Welchen Wert hat c in Abhängigkeit vom Parameter λ?

c) Sei wieder konkret $\lambda = \frac{1}{3}$. (Dann ist $c = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.)

   c1) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

   c2) Welche Standardabweichung hat Y? Schätzen Sie den Wert an Hand Ihrer Skizze aus a) ab, und kreisen Sie bei den folgenden Werten den richtigen (gerundeten) Wert ein.

   -1.324 $\quad - 0.784$ $\quad 0.005$ $\quad 0.143$ $\quad 0.333$ $\quad 0.845$ $\quad 1.358$ $\quad 1.5$ $\quad 1.892$ $\quad 3$